CORRESPONDANCE
SUR
L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

IIe. Vol. N°. 2. — Janvier 1810.

TABLE DES MATIÈRES.

§. Ier.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de P. GUEFFIER, rue du Foin-Saint-Jacques, n°. 18.

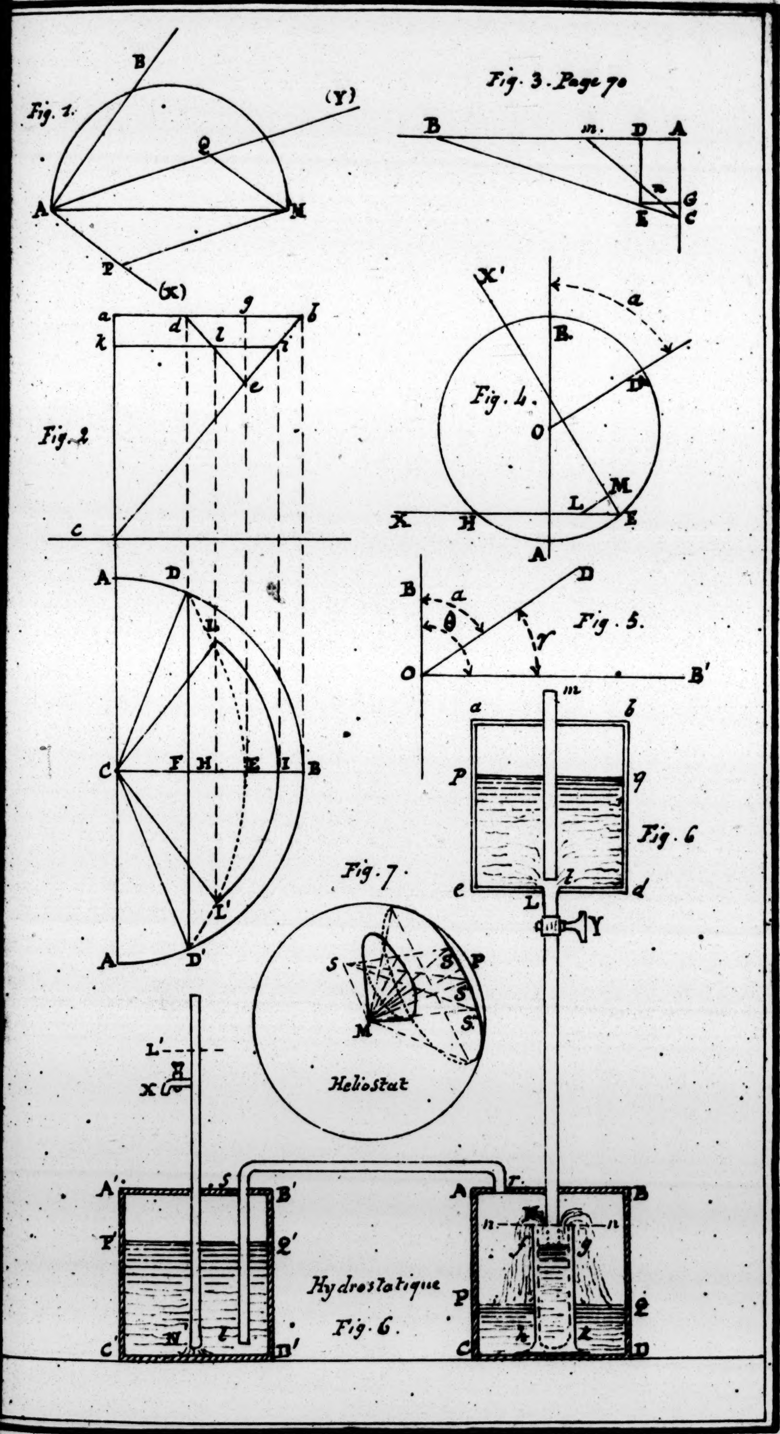
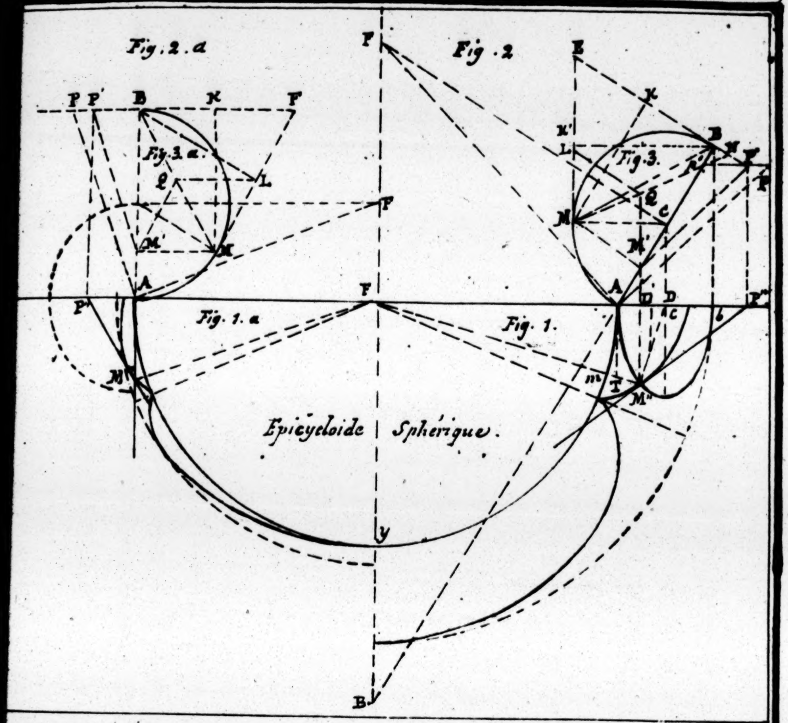
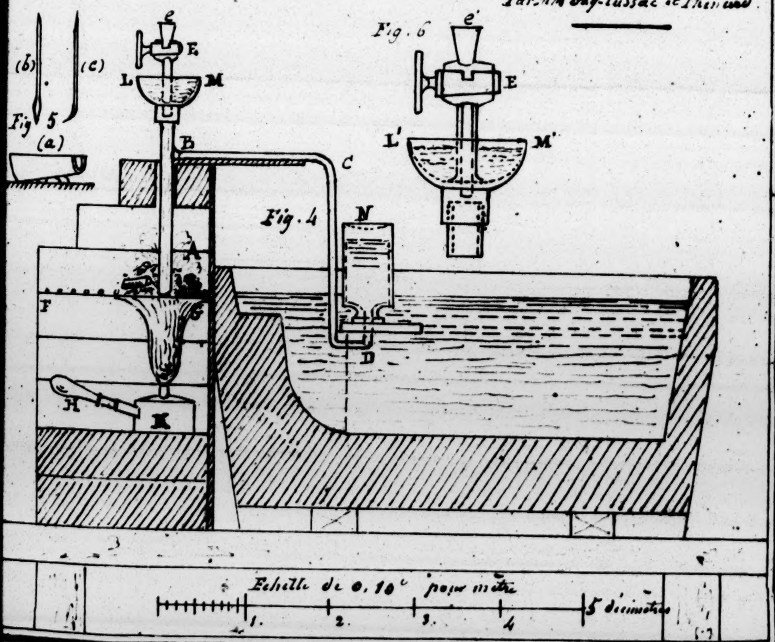


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3. Page 70
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Heliostat
Hydrostatique
Fig. 6.



Appareil pour l'Analyse des Substances Animales et Végétales.

Par MM. Gay-Lussac et Thenard



L'

A

d
q
u
a
d

p. 137 (voir note au bas de la p. 313

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. Hachette.

N°. 3. *Janvier* 1811. (2e. vol.)

S. I.

APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE.

Des Surfaces du second degré.

J'ai proposé, l'année dernière, la question suivante :

Etant donnée l'équation générale des surfaces du second degré, trouver la relation qui doit exister entre les constantes qui entrent dans cette équation, pour qu'elle appartienne à une surface de révolution ? Trois élèves du cours de la même année, MM. Urban, Merle, Mondot, ont traité cette question de deux manières différentes; M. Bourdon, professeur au Lycée Charlemagne, l'a résolue d'une troisième manière, et il a déduit de sa solution plusieurs conséquences importantes sur la théorie des surfaces du second degré. Comme il fait usage des équations par lesquelles M. Biot a déterminé la position des trois axes rectangulaires d'une surface du second degré, je vais d'abord exposer la méthode que ce géomètre a suivie pour obtenir ces équations. Cette méthode étant la plus simple et la plus élégante de celles qu'on a employées jusqu'à présent, on la substituera à celle que j'ai suivie dans le *Traité des Surfaces du second degré*, qui sert de texte à nos leçons.

Soit l'équation générale d'une surface du second degré

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy$$
$$+Cz+C'y+C''x+D=0\,;$$

x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette surface, et x', y', z', les nouvelles coordonnées de ce point parallèles aux axes principaux de la surface, on a (pag. 7, 2^e vol. de la Correspondance)

$$\begin{aligned} x &= m x' + m' y' + m'' z' \\ y &= n x' + n' y' + n'' z' \\ z &= p x' + p' y' + p'' z', \end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} m, n, p \\ m', n', p' \\ m'', n'', p'' \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{étant les cosinus des angles que l'axe principal des} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \left\{\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right.$$

fait avec les trois axes primitifs des x, des y, des z.

Les neuf constantes $m, n, p, m', n', p', m'', n'', p''$, sont liées entr'elles par le relations suivantes (pag. 14 et 15 du *Traité des surfaces du second degré*) :

$$\left.\begin{aligned} m^2+n^2+p^2 &= 1 \\ m'^2+n'^2+p'^2 &= 1 \\ m''^2+n''^2+p''^2 &= 1 \end{aligned}\right\}(1) \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned} m m' + n n' + p p' &= 0. \\ m m'' + n n'' + p p'' &= 0. \\ m' m' + n' n'' + p' p'' &= 0. \end{aligned}\right\}(2).$$

Substituant les valeurs de x, y, z, dans l'équation proposée, et formant les coefficiens de $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$, pour les égaler à zéro, on aura les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &2Ap'p''+2A'nn''+2A''m'm''+B(n'p''+p'n'') \\ &\qquad +B'(m'p''+p'm'')+B''(m'n''+n'm'')=0 \\ &2App''+2A'nn''+2A''mm''+B(np''+pn'') \\ &\qquad +B'(mp''+pm'')+B''(mn''+nm'')=0 \\ &2App'+2A'nn'+2A''mm'+B(np'+pn') \\ &\qquad +B'(mp'+pm'')+B''(mn'+nm')=0 \end{aligned}\right\}(3)$$

et pour abréger $\quad N=0,\ N'=0,\ N''=0 \quad$ (3)

d'où il suit que l'équation en x', y', z', sera en général de la forme

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 \delta x' + \epsilon y' + \zeta z' - 1 = 0$$

qu'on peut réduire, dans un grand nombre de cas, à celle-ci :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \gamma z'^2 - 1 = 0 ;$$

la surface représentée par cette dernière équation est rapportée à ses trois *axes principaux* et à son centre.

Il est important de remarquer que les neuf équations (1), (2), (3), sont symétriques par rapport aux trois systêmes des constantes (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p''); en sorte qu'à la place des trois constantes l, m, n, on peut substituer les trois autres l', m', n', ou l'', m'', n'', pourvu qu'à la place de ces trois dernières on mette respectivement l, m, n. Il suit de cette remarque qu'en éliminant huit des neuf constantes, les équations finales en m, ou en m', ou en m'', seront identiques; par la même raison, il y aura identité entre les équations finales en n, ou n', ou n'', et en p, ou p', ou p''; les équations finales auront donc pour racines, la première les quantités m, m', m''; la seconde, les quantités n, n', n''; la troisième, les quantités p, p', p''. Le calcul suivant, rédigé par M. Bourdon, a pour objet de démontrer que les racines de chacune de ces équations finales sont toujours réelles. H. C.

Détermination des axes principaux dans les surfaces du second degré, et en particulier, dans les surfaces de révolution du second degré.

Par M. Bourdon.

Les équations (3), combinées avec les équations des deux groupes (1) et (2), devront donner les valeurs de m, n, p, m'....

Si l'on multiplie la seconde des équations (3) par m', et la troisième par m'', qu'ensuite on les retranche l'une de l'autre, on obtient la nouvelle équation

$$\left.\begin{array}{r} 2A\ p\,(m'p''-p'm'') + B\ n\,(m'p''-p'm'') \\ + B'm\,(m'p''-p'm'') \\ + 2A'n\,(m'n''-n'm'') + B\ p\,(m'n''-n'm'') \\ + B''m\,(m'n''-n'm'') \end{array}\right\} = 0$$

ou
$$\begin{array}{r}(2A\,p + B\,n + B'\,m)\,(m'p''-p'm'') \\ +(2A'\,n + B\,p + B''\,m)\,(m'n''-n'm'') = 0 \quad (4).\end{array}$$

Multipliant de nouveau la deuxième par n', et la troisième par n'' ; puis retranchant la deuxième de la troisième, et réduisant, il vient

$$(2\,A\,p + B\,n + B'\,m)(p'\,n'' - n'\,p'')$$
$$+ (2\,A''\,m + B'\,p + B''\,n)(m'\,n'' - n'\,m'') = 0 \quad (5).$$

Or les deux premières équations du groupe (2) étant multipliées d'abord par m'' et m', puis par n'' et n', et étant retranchées, donnent aussi

$$n\,(m'\,n'' - n'\,m'') + p\,(m'\,p'' - p'\,m'') = 0$$
$$m\,(m'\,n'' - n'\,m'') + p\,(p'\,n'' - n'\,p'') = 0\,;$$

d'où

$$\frac{m'\,p'' - p'\,m''}{m'\,n'' - n'\,m''} = -\,\frac{n}{p}$$
$$\frac{p'\,n'' - n'\,p''}{m'\,n'' - n'\,m''} = -\,\frac{m}{p}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (4) et (5), il vient

$$(2\,A\,p + B\,n + B'\,m) \times -\,\frac{n}{p} + 2\,A'\,n + B\,p + B''\,m = 0$$
$$(2\,A\,p + B\,n + B'\,m) \times -\,\frac{m}{p} + 2\,A''\,m + B'\,p + B''\,n = 0$$

ou réduisant

$$2\,(A - A')\,n\,p + B\,(n^2 - p^2) + B'\,m\,n - B''\,m\,p = 0 \quad (6)$$
$$2\,(A - A'')\,m\,p + B\,m\,n + B'\,(m^2 - p^2) - B''\,n\,p = 0 \quad (7)$$

De ces équations on déduit facilement la suivante :

$$2\,(A' - A'')\,m\,n + B\,m\,p - B'\,n\,p + B''\,(m^2 - n^2) = 0 \quad (8)$$

que l'on pourra par conséquent substituer à l'une d'elles.

Deux quelconques des équations précédentes, combinées avec l'équation $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, donneront les valeurs de m, n, p.

Il nous reste à voir si ces quantités seront toujours susceptibles de détermination réelle, et comment on peut les obtenir.

Pour cela posons $\frac{m}{p}=t$; $\frac{n}{p}=u$;

d'où $m=pt$; $n=pu$.

L'équation $m^2+n^2+p^2=1$ donne

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}};\ m=\frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}};\ n=\frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}.$$

Et les équations (6), (7), (8), deviennent

$$Bu^2+B'ut+2(A-A')u-B''t-B=0 \quad (9)$$
$$B't^2+But+2(A-A'')t-B''u-B'=0 \quad (10)$$
$$B''t^2-B''u^2+2(A'-A'')ut+Bt-B'u=0 \quad (11)$$

Si l'on prend dans la première la valeur de t, et qu'on la substitue dans la seconde, le terme affecté d'u^4 disparoîtra, et il restera, pour déterminer u, une équation du troisième degré. Or, toute équation du troisième degré ayant au moins une racine réelle, il s'ensuit que u aura au moins une valeur réelle, et qu'il en sera par conséquent de même de t, m, n, p. Observons maintenant que si l'existence simultanée des équations (4), (5), et des deux premières équations du groupe (2), entraîne celle des deux équations (6) et (7), l'existence simultanée des équations (6) et (7) et des deux premières équations du groupe (2) entraîne aussi celle des deux équations (4) et (5), et par conséquent des équations (3) $N'=0$, $N''=0$.

Il résulte de là que si l'on rapporte la surface à trois nouveaux axes rectangulaires, en prenant pour axe des x la ligne qui correspond aux valeurs réelles de m, n, p, trouvées ci-dessus, comme ces valeurs vérifient deux quelconques des trois équations (6), (7) et (8), en même-temps que les deux premières équations du groupe (2), elles vérifieront également les deux équations (4) et (5), et par conséquent $N'=0$, $N''=0$; c'est-à-dire que l'équation de la surface, rapportée à ces nouveaux axes, dont deux restent arbitraires, cette équation, dis-je, sera privée des rectangles en xz et xy, et sera de la forme

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Nyz+Pz+P'y+P''x+Q=0.$$

Or on sait que, pour une équation du second degré à deux

variables, on peut toujours trouver une position d'axes rectangulaires, telle que le rectangle des deux variables n'entre plus dans l'équation.

Ainsi on pourra, en conservant l'axe des x qui vient d'être déterminé, prendre deux nouveaux axes des y et des z, tels que le rectangle yz disparoisse dans l'équation ci-dessus.

Il est donc démontré que, par une double transformation de coordonnées, on peut toujours faire disparoître les trois rectangles de l'équation générale des surfaces du second degré, et par conséquent qu'il existe, pour toute surface du second degré, au moins un système d'axes rectangulaires par rapport auxquels son équation est privée des trois rectangles.

(2) Pour peu que l'on jette les yeux sur les équations des groupes (1), (2), (3), on reconnoît qu'elles sont symétriques par rapport à m, n, p, m'..... Donc, en éliminant m, n, p, m'', n'', p'', par une méthode analogue à la précédente, on parviendroit à trois équations en m', n', p', identiques avec les équations (6), (7), (8). La détermination de ces quantités dépendroit d'une équation en u', identique avec l'équation en u.

Même raisonnement par rapport à m'', n'', p''.

Il résulte de là que l'équation du troisième degré en u ne doit pas plutôt donner la valeur d'u, d'où dépendent les quantités m, n, p, que les deux valeurs d'où dépendent les quantités m', n', p', et m'', n'', p'', c'est-à-dire, les donne toutes trois à la-fois. Et, comme nous venons de démontrer l'existence d'un système de trois axes différens, par rapport auxquels l'équation de la surface peut être privée des trois rectangles, c'est-à-dire pour lesquels les équations des groupes (1), (2), (3), seroient satisfaites, il s'ensuit, 1° que les trois racines de l'équation en u doivent être réelles; 2° que chacune d'elles, substituée en même-temps que la valeur correspondante de t, dans les équations

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}\,;\quad m=\frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}\,;\quad n=\frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}\,,$$

donneroit, la première, les valeurs de m, n, p, qui correspondent à l'axe des x, par exemple; la seconde, celles de m', n', p', qui correspondent à l'axe des y; la troisième, enfin, celles de m'', n'', p'', qui correspondent à l'axe des z. Et ces trois axes ainsi déterminés formeroient le système dont nous avons démontré l'existence, art. 1.

Il est facile de voir, d'après l'analyse précédente, que ce système est en général unique pour une même origine, mais que, par chaque point de l'espace, on peut en imaginer un qui jouisse de la même propriété; et que tous ces systèmes sont parallèles entre eux.

Nous désignerons dorénavant les trois axes dont nous venons de parler, sous les noms d'axes principaux de la surface.

Examinons maintenant quelques cas particuliers.

La détermination des trois valeurs d'u, entraîne en général dans des calculs très-compliqués. Mais il existe des cas où ces valeurs peuvent être obtenues facilement, c'est lorsque l'une des deux équations (9) et (10), où toutes les deux sont décomposables en deux facteurs du premier dégré.

Recherchons, par exemple, la condition qui doit avoir lieu pour que l'équation (9) soit décomposable.

On tire de cette équation . . . . . . $u = -\frac{B't + 2(A-A')}{2B}$

$$\pm \frac{1}{2B}\sqrt{B'^2t^2 + 4[B'(A-A') + BB'']t + 4[(A-A')^2 + B^2]}.$$

Or, pour qu'elle soit décomposable en deux facteurs rationnels, il faut que la quantité sous le radical de la valeur d'u soit un carré parfait, ce qui exige que l'on ait,

$$16[B'(A-A') + BB'']^2 - 16[(A-A')^2 + B^2]B'^2 = 0,$$

ou réduisant $\qquad 2B'B''(A-A') + B(B''^2 - B'^2) = 0.$

Cette relation donne

$$2(A-A') = \frac{B(B'^2 - B''^2)}{2B'B''}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression d'u et faisant toutes les réductions, on en tire successivement,

$$B'u - B'' = 0\,; \quad BB''u + B'B''t + BB' = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$(B'u - B'')(BB''u + B'B''t + BB') = 0 \qquad (12)$$

Cela posé, le 1er facteur donne

$$u = \frac{B''}{B'}.$$

Substituant dans l'équation (10), il vient

$$t^2 + \frac{BB'' + 2B'(A - A'')}{B'^2} - \frac{B'^2 + B''^2}{B'^2} = 0,$$

équation dont les deux racines sont essentiellement réelles et faciles à obtenir.

Le 2e facteur donne

$$u = -\frac{B'B''t + BB'}{BB''};$$

d'où, en substituant dans l'équation (10),

$$[2BB''(A'' - A) + B'B^2 - B'B''^2]t = 0.$$

équation qui a pour valeur unique, $t = 0$; ce qui donne

$$u = -\frac{B'}{B''};$$

et par conséquent.

$$m = 0;\ n = -\frac{B'}{\sqrt{B'^2 + B''^2}};\ p = \frac{B''}{\sqrt{B'^2 + B''^2}}.$$

4. Si dans l'équation qui vient de donner la troisième valeur de t on suppose que le coefficient soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$2BB''(A'' - A) + B'(B^2 - B''^2) = 0$$

la valeur de t reste indéterminée, ce qui annonce que le nombre des systêmes d'axes principaux est infini.

Et en effet, la condition précédente étant satisfaite, l'équa-

tion (10) est aussi décomposable en deux facteurs du premier dégré et peut-être mise sous la forme :

$$(Bt - B'')(BB''u + B'B''t + BB') = 0 \qquad (13).$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (12), on reconnoît qu'elles ont un facteur commun qui, égalé à zéro, donnera une infinité de valeurs pour u et t.

Ainsi il existe, dans ce cas, une infinité de systêmes d'axes principaux, passant par un même point.

Mais tous ces systêmes jouissent d'une propriété remarquable: c'est d'avoir un axe commun.

Pour le prouver, remarquons que les équations (12) et (13) sont satisfaites,

1° par le systême $B'u - B'' = 0; Bt - B'' = 0;$
2° par l'équation $BB''u + B'B''t + BB' = 0$

Le 1^er^ systême donne

$$u = \frac{B''}{B'}; \ t = \frac{B''}{B},$$

d'où, en désignant par m, n, p, les cosinus des angles que forme cet axe particulier avec les axes primitifs,

$$p = \frac{BB'}{\sqrt{B^2B'^2 + B''^2B^2 + B'^2B''^2}}; \ n = \frac{BB''}{\sqrt{}}; \ m = \frac{B'B''}{\sqrt{}}.$$

Représentons maintenant par m_i, n_i, p_i, et m_{ii}, n_{ii}, p_{ii}, les cosinus relatifs aux deux axes conjugués de celui-ci. Comme ces trois axes sont rectangulaires, on a les relations

$$mm_i + nn_i + pp_i = 0; \ mm_{ii} + nn_{ii} + pp_{ii} = 0,$$

ou, mettant à la place de m, n, p, les valeurs que l'on vient de trouver,

$$B'B''m_i + BB''n_i + BB'p_i = 0;$$
$$B'B''m_{ii} + BB''n_{ii} + BB'p_{ii} = 0.$$

Et si, pour déterminer $m_i, n_i, p_i, m_{ii}, n_{ii}, p_{ii}$, on fait

$$m_i = p_i t; \ n_i = p_i u; \ m_{ii} = p_{ii} t; \ n_{ii} = p_{ii} u,$$

les deux équations se réduisent à

$$BB''u + B'B''t + BB' = 0,$$

qui est précisément celle dont on doit tirer les valeurs d'u et de t propres à donner tous les axes autres que celui qui correspond à

$$u = \frac{B''}{B'}; \quad t = \frac{B''}{B}.$$

Concluons de-là, que lorsque les conditions

$$2B'B''(A - A') + B(B''^2 - B'^2) = 0 \qquad (Y)$$

$$2BB''(A'' - A) + B'(B^2 - B''^2) = 0 \qquad (Z)$$

existent simultanément, le nombre des systêmes d'axes principaux est infini; mais tous ces systêmes ont pour axe commun, la ligne déterminée par les équations

$$u = \frac{B''}{B'}; \quad t = \frac{B''}{B}.$$

Remarquons en passant, que les deux conditions précédentes, renferment la suivante;

$$2BB'(A' - A'') + B''(B'^2 - B^2) = 0 \qquad (X)$$

et, qu'avec cette condition, l'équation (11) peut se mettre sous la forme

$$(B'u - Bt)(BB''u + B'B''t + BB') = 0.$$

(Voyez le supplément page 250).

DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ.

Caractères auxquels on reconnoît qu'une surface du 2e degré est de révolution. — Détermination de l'axe de révolution.

(5) L'analyse précédente conduit naturellement à l'examen des surfaces du second degré, pour lesquelles les relations (X),

(Y) et (Z), ont lieu. Or nous pouvons reconnoître *à priori* que ces sortes de surfaces sont du genre des surfaces de révolution.

Proposons-nous, en effet, de déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficiens d'une équation du second degré à trois variables, pour que la surface qu'elle représente soit de révolution.

Soient d'abord $x-\alpha=a(z-\gamma)$; $y-\beta=b\,(z-\gamma)$, les équations d'un axe de révolution passant par le point α, β, γ; $z+ax+by=c$, l'équation d'un plan perpendiculaire à cet axe; $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ l'équation d'une sphère ayant son centre au point α, β, γ. On sait que l'équation générale et caractéristique des surfaces de révolution est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=F(ax+by+z).$$

Ainsi, pour qu'une surface soit de révolution, il faut que son équation soit ou puisse être ramenée à une semblable forme.

(6) Il résulte de là que les équations des surfaces de révolution du second degré sont toutes susceptibles d'être mises sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=K\,(ax+by+z)^2+L, \quad (M)$$

K et L étant des quantités constantes.

Nous ne tenons point compte de la première puissance de $ax+by+z$, parceque, si elle se trouvoit dans le second membre, on pourroit la faire passer dans le premier membre, qui seroit encore de la forme $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$.

Cela posé, considérons l'équation générale du second degré

$$\begin{aligned} &Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy+ \\ &+Cz+C'y+C''x+D=0 \qquad (N) \end{aligned}$$

et voyons quelles relations il doit exister entre ses coefficiens, pour qu'elle soit susceptible d'être ramenée à la forme ci-dessus.

En développant l'équation (M), et ordonnant, on a

$$\begin{aligned} &(K-1)z^2+(Kb^2-1)y^2+(Ka^2-1)x^2+ \\ &+2Kby+2Kaxz+2Kabxy+ \\ &+2\gamma z+2\beta y+2\alpha x+L-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=0. \end{aligned}$$

Observons maintenant que des six premiers coefficiens de l'équation (2), cinq seulement sont nécessaires. Il faut donc

diviser les équations (2) et (3) par le coefficient de z^2, avant de les comparer. Ces préparations faites, on obtiendra les relations

$$\frac{A'}{A}=\frac{Kb^2-1}{K-1}\,;\quad \frac{A''}{A}=\frac{Ka^2-1}{K-1}\,;\quad \frac{B}{A}=\frac{2Kb}{K-1}\,;$$

$$\frac{B'}{A}=\frac{2Ka}{K-1}\,;\quad \frac{B''}{A}=\frac{2Kab}{K-1}\,,\ \text{etc.}$$

Nous n'écrivons que ces équations, qui sont les seules susceptibles de donner des équations de condition.

On tire des trois dernières

$$1^\circ \quad \frac{4K^2ab}{2Kab(K-1)}=\frac{2K}{K-1}=\frac{BB'}{AB''}\,;$$

$$\text{d'où} \quad K=\frac{BB'}{BB'-2AB''}\,;\quad K-1=\frac{2AB''}{BB'-2AB''}\,;$$

$$2^\circ \quad b=\frac{B(K-1)}{2AK}=\frac{B''}{B'}\,;$$

$$3^\circ \quad a=\frac{B''}{B}\,;$$

substituant ces valeurs dans les deux premières, il vient

$$4^\circ \quad \frac{A'}{A}=\frac{KB''^2-B'^2}{(K-1)B'^2}=\frac{\dfrac{BB'B''^2}{BB'-2AB''}-B'^2}{\dfrac{2AB''B'^2}{BB'-2AB''}}=$$

$$=\frac{B(B''^2-B'^2)+2AB'B''}{2AB'B''},$$

d'où résulte la première équation de condition

$$2B'B''(A-A')+B(B''^2-B'^2)=0 \qquad (Y)$$

$$5^\circ \quad \frac{A''}{A}=\frac{KB''^2-B^2}{(K-1)B^2}=\frac{\dfrac{BB'B''^2}{BB'-2AB''}-B^2}{\dfrac{2AB''B^2}{BB'-2AB''}}=$$

$$=\frac{B(B''^2-B^2)+2ABB''}{2ABB''}\,;$$

'où résulte la seconde équation de condition

$$2BB''(A-A'')+B'(B''^2-B^2)=0 \qquad (Z).$$

Donc, pour qu'une équation du second degré appartienne à ne surface de révolution, il faut que les deux équations de ondition précédentes soient satisfaites.

(7) Réciproquement, toutes les fois qu'elles seront satisfaites, surface sera de révolution, et l'on pourra même déterminer position de l'axe.

En effet on en déduit

$$\frac{A'}{A}=\frac{B(B''^2-B'^2)+2AB'B''}{2AB'B''};$$

$$\frac{A''}{A}=\frac{B'(B''^2-B^2)+2ABB''}{2ABB''},$$

u (art. 6) $\dfrac{A'}{A}=\dfrac{Kb^2-1}{K-1}$; $\dfrac{A''}{A}=\dfrac{Ka^2-1}{K-1}$

$$\left(\text{En posant } \frac{BB'}{BB'-2AB''}=K;\ \frac{B''}{B'}=b;\ \frac{B''}{B}=a\right)$$

n aura de même

$$\frac{B}{A}=\frac{2Kb}{K-1};\ \frac{B'}{A}=\frac{2Ka}{K-1};\ \frac{B''}{A}=\frac{2Kab}{K-1},$$

t l'équation (N) deviendra

$$z^2+\frac{Kb^2-1}{K-1}y^2+\frac{Ka^2-1}{K-1}x^2+$$
$$\frac{2Kb}{K-1}yz+\frac{2Ka}{K-1}xz+\frac{2Kab}{K-1}xy+$$
$$\frac{C}{A}z+\frac{C'}{A}y+\frac{C''}{A}x+\frac{D}{A}=0;$$

'où

$$(K-1)z^2+(Kb^2-1)y^2+(Ka^2-1)x^2+$$
$$+2Kbyz+2Kaxz+2Kabxy+$$
$$+\frac{C(K-1)}{A}z+\frac{C'(K-1)}{A}y+\frac{C''(K-1)}{A}x+\frac{D(K-1)}{A}=0,$$

ou $\left[z-\frac{C(K-1)}{2A}\right]^2+\left[y-\frac{C'(K-1)}{2A}\right]^2+$

$$+\left[x-\frac{C''(K-1)}{2A}\right]^2=K(z+ax+by)^2+$$

$$+\frac{(K-1)^2(C^2+C'^2+C''^2)}{4A^2}+\frac{D(K-1)}{A}=0,$$

équation d'une surface de révolution dont l'axe est détermin[é] par les équations

$$x-\frac{C''(K-1)}{2A}=a\left(z-\frac{C(K-1)}{2A}\right);$$

$$y-\frac{C'(K-1)}{2A}=b\left(z-\frac{C(K-1)}{A}\right).$$

Il faut se rappeler que l'on a

$$K=\frac{BB'}{BB'-2AB''};\ b=\frac{B''}{B'};\ a=\frac{B''}{B}.$$

(8) Il est facile de s'assurer que cet axe de révolution es[t] parallèle à l'axe déterminé (art. 4) par les équations

$$p=\frac{BB'}{\sqrt{B^2B'^2+B^2B''^2+B'^2B''^2}};\ m=\frac{BB'}{\sqrt{\quad}};\ n=\frac{BB''}{\sqrt{\quad}}$$

En effet, soient cos x, cos y, cos z, les cosinus des angle[s] que forme l'axe de révolution avec les axes primitifs. On a, d'après les formules connues,

$$\cos z=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{BB'}{\sqrt{B^2B'^2+B^2B''^2+B'^2B''^2}}$$

$$\cos y=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{BB''}{\sqrt{id.}}$$

$$\cos x=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{B'B''}{\sqrt{id.}}.$$

En rapprochant ce que nous venons de dire sur les surface[s] de révolution du second degré, de l'analyse relative à la dispa-

rition des rectangles, on peut conclure que les surfaces de révolution du second degré ont une infinité de systèmes d'axes principaux non parallèles. Mais l'un de ces axes est commun à tous les systèmes et est parallèle à l'axe de révolution ; en outre ce sont les seules surfaces du second degré qui en aient un nombre infini.

(9) Les conditions trouvées (art. 6) souffrent quelques modifications, lorsque l'équation est privée de quelques-uns des rectangles.

Observons d'abord que, si l'équation est privée d'un seul rectangle, la surface ne peut être de révolution.

Car soit $B=o$, par exemple, la seconde condition trouvée art. 6, se réduit à $B'B''^2=o$, équation absurde, puisque les deux rectangles xz, xy, existent dans l'équation. Il en seroit de même si un seul de ces deux autres rectangles étoit nul. On peut d'ailleurs reconnoître que l'équation caractéristique (M) des surfaces de révolution du second degré ne peut jamais être réduite à ne renfermer que deux rectangles.

(10) Considérons maintenant le cas où deux des rectangles manquent dans l'équation. Les deux conditions générales sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque deux des trois quantités B, B', B'', entrent dans chacun de leurs termes. Mais observons que l'on en déduit

$$A-A'=\frac{B(B'^2-B''^2)}{2B'B''};$$

$$A-A''=\frac{B'(B^2-B''^2)}{2BB''};$$

$$A'-A''=\frac{B''(B^2-B'^2)}{2BB'};$$

d'où

$$(A-A')(A-A'')=\frac{(B'^2-B''^2)(B^2-B''^2)}{4B''^2};$$

$$(A-A')(A'-A'')=\frac{(B'^2-B''^2)(B^2-B'^2)}{4B'^2};$$

$$(A-A'')(A'-A'')=\frac{(B^2-B''^2)(B^2-B'^2)}{4B^2}.$$

Cela posé, soit d'abord $B=o$, $B'=o$.

La première équation se réduit à

$$B''^2 - 4(A - A')(A - A'') = 0,$$

et les deux autres à $\qquad 0 = 0.$

Ainsi, toutes les fois que l'équation est privée des deux rectangles yz et xz, la seule condition nécessaire est

$$B''^2 - 4(A - A')(A - A'') = 0;$$

et en effet l'équation peut, dans ce cas, s'écrire ainsi

$$z^2 + y^2 + x^2 + \frac{C}{A}z + \frac{C'}{A}y + \frac{C''}{A}x + \frac{D}{A} =$$

$$= \frac{A - A'}{A}y^2 + \frac{A - A''}{A}x^2 - \frac{B''}{A}xy.$$

Or, pour que cette équation représente une surface de révolution, il faut, et il suffit que le second membre soit un carré parfait; ce qui donne la condition

$$B''^2 - 4(A - A')(A - A'') = 0.$$

Sous cette condition, l'équation devient

$$\left(z + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C'}{2A}\right)^2 + \left(x + \frac{C''}{2A}\right)^2 =$$

$$= \frac{A' - A}{A}\left(y - \frac{B''x}{2(A - A')}\right)^2 + \frac{C^2 + C'^2 + C''^2}{4A^2} - \frac{D}{A}.$$

Or le plan perpendiculaire à l'axe de révolution ayant pour équation $y - \dfrac{B''x}{2(A - A')} = \text{constante}$, est perpendiculaire au plan des xy. L'axe est donc parallèle à ce dernier plan, et a pour équation

$$z + \frac{C}{2A} = 0;\ y + \frac{C'}{2A} = \frac{-2(A - A')}{B''}\left(x + \frac{C''}{2A}\right).$$

On obtiendroit de même

pour l'hypothèse de $\qquad B = 0;\ B'' = 0,$

la condition... $B'^2 - 4(A' - A)(A' - A'') = 0;$

et pour l'hypothèse de $B' = 0;\ B'' = 0,$

la condition.... $B^2 - 4(A'' - A)(A'' - A') = 0.$

(11) Considérons enfin le cas où les trois rectangles manquent dans l'équation. Il seroit facile de le déduire du cas précédent, et on trouveroit que deux des trois coefficiens A, A', A'', doivent être égaux et de même signe; mais on peut obtenir directement cette même condition. En effet, l'équation de la surface ne renfermant aucun des rectangles, le second membre de l'équation caractéristique des surfaces de révolution du second degré ne peut plus contenir qu'une des variables. Ainsi la proposée doit pouvoir être mise sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=$$
$$=Kx^2+L,\quad \text{ou}\quad Ky^2+L\quad \text{ou}\quad Kz^2+L;$$

ce qui exige évidemment que deux des coefficiens soient égaux et de même signe.

Et, lorsque cette condition est satisfaite, l'équation appartient à une surface de révolution, dont l'axe est parallèle à l'un des trois axes rectangulaires, celui suivant lequel se compte la variable, dont le carré est affecté d'un coefficient différent des deux autres.

Sur les surfaces du second degré, de révolution.

Par MM. Urban et Merle, *élèves.*

Soit l'équation générale du second degré :

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+Kz+1=0 \quad (1).$$

Si on a les équations de condition, (identiques avec les équations (X), (Y), (Z), pag. 196)

$$\left.\begin{array}{l} 2(a-b)ef-d(e^2-f^2)=0 \\ 2(a-c)df-e(d^2-f^2)=0 \\ 2(b-c)de-f(d^2-e^2)=0 \end{array}\right\} \quad (a)$$

l'équation (1) représente une surface de révolution dont l'axe a pour équations

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{d}{f}z+\dfrac{kd-gf}{2af-de} \\ y=\dfrac{d}{e}z+\dfrac{kd-eh}{2be-df} \end{array}\right\} \quad (b)$$

Démonstration. Si la surface est de révolution, en changeant les axes des coordonnées, et prenant l'axe des z' parallèle à l'axe de révolution, on doit parvenir à une équation dans laquelle les rectangles disparoissent, et dont les coefficiens de x'^2 et y'^2 soient égaux, puisque les intersections parallèles au plan des $x'y'$ doivent être des circonférences de cercle.

Prenons pour axe des z' la ligne qui a pour équations $x=\frac{d}{f}z$ et $y=\frac{d}{e}z$; pour axe des x', l'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe des z' mené par l'origine, avec le plan des xy, et pour axe des y' une perpendiculaire au plan des $x'z'$. Nous aurons, en faisant pour abréger,

$$\sqrt{e^2+f^2}=p, \qquad \sqrt{d^2e^2+d^2f^2+e^2f^2}=q,$$

$$x=-\frac{fe^2}{pq}x'+\frac{f}{p}y'+\frac{de}{q}z',$$

$$y=-\frac{f^2e}{pq}x'-\frac{e}{p}y'+\frac{df}{q}z',$$

$$z=\frac{d(e^2+f^2)}{pq}x'+\frac{ef}{q}z',$$

Substituant, on trouve pour les coefficiens de $x'y'$, $x'z'$ et $y'z'$ des expressions qui respectivement peuvent s'écrire ainsi

$$1^\circ \left\{ -\frac{ef}{p^2q}\left\{2(a-b)ef-d(e^2-f^2)\right\}\right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{e^3}{pq^2}\left\{2(a-c)df-e(d^2-f^2)\right\}-\ldots \\ -\dfrac{f^3}{pq^2}\left\{2(b-c)de-f(d^2-e^2)\right\} \end{array}\right.$$

$$3^\circ \left\{ \frac{d}{pq}\left\{2(a-b)ef-d(e^2-f^2)\right\}\right.$$

expressions qui, toutes trois, se réduisent à zéro dans l'hypothèse où les équations (a) ont lieu, c'est-à-dire, lorsque la surface est de révolution.

Le coefficient de x'^2 est

$$\frac{ae^4f^2+be^2f^4+de^3f^3+(cd^2-def)(e^2+f^2)^2}{p^2q^2}\,...$$

Celui de y'^2 est $\dfrac{af^2+be^2-def}{p^2}$.

Multipliant ce dernier par q^2 haut et bas, et retranchant du premier, on aura un résultat, tel que si on y substitue pour b et c leurs valeurs tirées des deux premières équations (a), il se réduit à zero.

Lorsqu'une surface du second degré sera de révolution, les équations (a) auront lieu ; et réciproquement, toutes les fois que ces équations auront lieu, la surface sera de révolution autour d'une droite qui aura pour équations, les équations (b).

Caractères auxquels on peut reconnaître qu'une équation du second degré à trois variables représente une surface de révolution.

Par M. Mondot, *élève*.

Une surface sera reconnue être de révolution si l'on peut trouver un système de plans parallèles, qui la coupent suivant une suite de cercles dont les centres soient sur une même droite perpendiculaire à ces plans coupans. Or on sait :

Qu'un cercle projeté sur un plan devient une ellipse qui a pour rapport de ses axes le cosinus de l'angle du plan du cercle et du plan de projection, le grand axe étant parallèle à la commune intersection des deux plans ;

Que, réciproquement, si une ellipse donnée est la projection d'une figure située dans un plan qui coupe celui de la courbe suivant une parallèle à l'axe, sous un angle dont le cosinus soit égal au rapport des axes, la figure projetée est un cercle dont le centre correspond à celui de l'ellipse ;

Que deux cercles concentriques donnent pour projections orthogonales sur un même plan deux ellipses semblables, concentriques, semblablement placées, et, réciproquement, que si sur chacun des trois plans coordonnés on a deux ellipses semblables, concentriques, semblablement placées, et que l'une d'elles soit la projection d'un cercle, l'autre ne peut être la projection

d'une figure située dans le plan du cercle, qu'autant que cette figure projetée est un cercle concentrique au premier;

Que, dans l'équation générale d'une ellipse, les coefficiens des trois termes en x^2, y^2 et xy, déterminent complètement le rapport des axes et leur position; d'où il suit que, si deux ellipses ont ces trois premiers termes communs dans leur équation, elles seront concentriques, semblables et semblablement placées.

Cela posé, voici la question à résoudre :

L'équation générale des surfaces du second degré étant

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+k=0,$$

il faut trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens, pour que la surface représentée soit de révolution.

Or cette équation peut, par une transformation de coordonnées qui répond à la seule transposition de l'origine, prendre la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+K=0 \qquad (1)$$

les six premiers coefficiens étant les mêmes que dans l'équation précédente. L'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes donnent, dans ce cas, pour K une valeur finie; les paraboloïdes donnent, à la vérité, une valeur infinie, mais cette dernière circonstance n'est d'aucune conséquence; la transformation est possible algébriquement; K est toujours une fonction des autres coefficiens, fonction qu'on peut assigner.

Je vais chercher les relations nécessaires entre les coefficiens de la dernière équation, pour qu'elle représente une surface de révolution, et cela me suffira, car il arrivera que ces relations seront entre les coefficiens communs aux deux équations, indépendantes de k, et s'appliquant par conséquent à tous les cas, même à celui des hyperboloïdes.

La méthode qui doit me conduire au résultat est fondée sur la remarque suivante :

Un cône droit dont l'axe a pour équations

$$\alpha x=\beta y,\ \alpha x=\gamma z,$$

et dont l'angle au centre a pour cosinus φ, est représenté par l'équation

$$\varphi^2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)=(\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z)^2$$

dont le développement ordonné est

(en représentant $\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2$ par Σ_2):

$$(\varphi^2 \Sigma_2 - \beta^2 \gamma^2) x^2 + (\varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \gamma^2) y^2 + (\varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \beta^2) z^2 -$$
$$- 2 \alpha \beta \gamma^2 x y - 2 \alpha \beta^2 \gamma x z - 2 \alpha^2 \beta \gamma y z = 0,$$

que je désignerai par $A = 0$.

Un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe, et ayant par conséquent pour équation

$$(2) \qquad \beta \gamma x + \alpha \gamma y + \alpha \beta z + D = 0,$$

coupe le cône suivant un cercle : si donc on élimine l'une quelconque des variables x, y, z, entre les deux dernières équations, l'équation finale, appartenant à la projection de la section, doit être celle d'une ellipse ayant pour rapport de ses axes le cosinus de l'angle du plan (2) et des plans de projection. Mais il est évident que si j'ajoute à A un terme constant, et que j'élimine entre l'équation (2) et l'équation

$$(3) \qquad A + T = 0,$$

le résultat de l'élimination ne différera du précédent que par la valeur du terme constant ; donc les deux ellipses, projections des sections des surfaces représentées par l'équation (3), par le plan (2), seront semblables à celles du cône par le même plan : donc les sections, faites par le plan (2) dans les surfaces (3), seront des cercles concentriques à ceux obtenus dans le cône ; c'est une suite des principes rappelés précédemment. Donc, d'après le caractère géométrique convenu, les surfaces représentées par (3) sont de révolution et ont pour axe la droite représentée par

$$\alpha x = \beta y, \quad \alpha x = \gamma z.$$

Non-seulement l'équation (3) représente toujours une surface de révolution ; mais je dis de plus qu'elle comprend toutes les surfaces de révolution du second degré. Prenons, en effet, une surface quelconque de révolution du second degré ; son axe peut toujours être représenté par $\alpha x = \beta y$, $\alpha x = \gamma z$. Coupée par les plans (2) perpendiculaires à son axe, elle doit donner pour sections des cercles qui se projettent suivant des ellipses de la nature de celles que nous avons considérées tout-à-l'heure, ayant par conséquent les trois mêmes premiers coefficiens dans leurs équations. Donc, chacune de ces équations ne peut résulter que de l'élimination entre (2) et (3), ou entre (2) et une équation qui soit le produit de (3) par un facteur nécessairement numérique.

Cette conclusion dérive de ce principe d'algèbre : « que si une » équation résulte de l'élimination entre deux autres P et Q, » c'est-à-dire, si elle est leur plus grand commun diviseur; » pour que la même équation finale résulte de la combinaison P » et d'une autre équation Q' différente de Q, il faut que Q' soit » un multiple de Q. » Or, dans le cas qui nous occupe, le rapport de Q à Q' ne peut être que numérique, puisque les deux équations doivent être du même degré.

L'équation (3) peut donc toujours, par des déterminations convenables de ses coefficiens, être identifiée à celle d'une surface de révolution donnée quelconque.

Il suit des remarques précédentes, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface donnée soit de révolution est que l'équation (3) puisse être identifiée à la sienne.

Ces préliminaires posés, passons à l'équation proposée.

Les conditions demandées sont évidemment celles d'où dépend l'identité des équations (1) et (3); elles sont au nombre de six, savoir :

$$a = \varphi^2 \Sigma_2 - \beta^2 \gamma^2$$
$$b = \varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \gamma^2$$
$$c = \varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \beta^2$$
$$d = -2 \alpha \beta \gamma^2$$
$$e = -2 \alpha \beta^2 \gamma^2$$
$$f = -2 \alpha^2 \beta \gamma.$$

Ces relations, devant être satisfaites par des valeurs communes de α, β, γ, φ, donneront deux équations de condition, que j'obtiendrai en éliminant ces quatre quantités; or, en divisant par la valeur de d celles de e et de f, j'ai successivement les valeurs de α et de β en γ, qui sont $\beta = \frac{\gamma e}{d}$, $\alpha = \frac{\gamma f}{d}$. Ces valeurs, substituées dans les quatre premières équations, les changent en

$$a = \varphi^2 \Sigma_2 - \frac{\gamma^4 e^2}{d^2}$$

$$b = \varphi^2 \Sigma_2 - \frac{\gamma^4 f^2}{d^2}$$

$$c = \varphi^2 \Sigma_2 - \frac{\gamma^4 e^2 f^2}{d^4}$$

$$d = -\frac{2 \gamma^4 e f}{d^2}.$$

On peut éliminer ϕ^2, et en même temps Σ_2, en retranchant successivement la seconde et la troisième équations de la première, car les deux différences sont

$$a-b=\frac{\gamma^4}{d^2}(e^2-f^2)$$

$$a-c=\frac{d^4 e^2}{d^2}\left(\frac{f^2}{d^2}-1\right)$$

ajoutant la valeur de d

$$d=-\frac{2\gamma^4 ef}{d^2}.$$

J'ai trois équations qui ne renferment que γ, et, pour éliminer cette quantité, il suffit de diviser la dernière équation par la première, puis par la seconde ; car il vient alors pour les conditions cherchées

$$\left.\begin{array}{l} 2(a-b)ef+d(f^2-e^2)=0 \\ 2(a-c)df+e(f^2-d^2)=0 \\ \text{auxquelles, pour la symétrie, on peut ajouter cette} \\ \text{troisième qui s'en déduit} \\ 2(b-c)de+f(f^2-d^2)=0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Telles sont les conditions cherchées, dont deux suffisent.

(Ces conditions ne diffèrent pas de celles qu'on a trouvées, art. 4, page 196.)

Toutes les surfaces de révolution du second degré satisfont à ces conditions ; et réciproquement, toute équation qui satisfait à ces conditions, doit représenter une surface de révolution. Il existe cependant une circonstance qui semble échapper à cette règle ; c'est celle où deux des trois coefficiens d, e, f, sont nuls, ou lorsque tous les trois le sont. En effet, l'axe de révolution est dans tous les cas

$$\alpha x=\beta y, \qquad \alpha x=\beta z,$$

et devient $\quad fx=ey, \qquad fx=dz,$

par les valeurs de α, β, γ; or, tant qu'aucun des coefficiens d, e, f, est nul, ou lorsque deux ne le sont pas, on peut construire l'axe ; mais si deux sont égaux à zéro, l'axe a pour une de ses équations $0=0$: ce qui n'indique pas toujours, comme on pourroit le croire, que l'axe est une droite quel-

conque, mais qui fait voir que, par la méthode suivie, l'algèbre ne peut résoudre la question. Dans ce cas, d'autres considérations lèvent la difficulté. En effet, s'il ne reste qu'un coefficient de rectangles des coordonnées, supposons que ce soit celui en xy, l'équation de la surface donnée sera

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + K = 0.$$

Il est clair qu'alors l'axe des coordonnées z devient un des axes de la surface; or nous savons que la condition pour qu'une surface du second degré soit de révolution, est que deux de ses axes soient égaux et réels; l'axe suivant z est égal en longueur à

$$2\sqrt{-\frac{K}{c}};$$

les deux autres sont ceux de la section par le plan xy, laquelle est

$$ax^2 + by^2 + dxy + K = 0.$$

Pour avoir les axes de cette ellipse, je transforme les coordonnées, en remplaçant x par $x\cos\alpha - y\sin\alpha$, et y par $x\sin\alpha + \cos\alpha$, et l'équation devient

$$\left.\begin{array}{r} aC^2 \\ +bS^2 \\ +dCS \\ \\ \end{array}\right| \begin{array}{r} x^2 + aS^2 \\ +bC^2 \\ +dCS \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{l} y^2 - 2aCS \\ \;\;+2bCS \\ \;\;-dS^2 \\ \;\;+dC^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} xy^2 + K = 0 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

C et S désignant $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

Egalant à zéro le coefficient de xy, l'équation qui donne C et S sera

$$\left.\begin{array}{l} 2CS(b-a) + d(C^2 - S^2) \\ C^2 + S^2 = 1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

à laquelle il faut joindre $C^2 + S^2 = 1$

et les axes deviendront

$$2\sqrt{-\frac{K}{aC^2 + bS^2 + dCS}} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{-\frac{K}{aS + bC^2 - dCS}}$$

La condition est l'égalité de deux axes ; il suffit donc qu'on ait l'une des trois équations

$$c = aC^2 + bS^2 + dCS$$

$$c = aS^2 + bC^2 - dCS$$

$$aC^2 + bS^2 + dCS = aS^2 + bC^2 - cCS.$$

C et S sont donnés par les deux équations (5) et ont pour valeurs

$$C = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4(b-a)^2}}$$

$$S = \frac{2(b-a)}{\sqrt{d^2 + 4(b-a)^2}}.$$

Les trois conditions deviennent par les substitutions, après avoir simplifié,

$$(6)\quad \begin{cases} 4(c-b)(a-b)^2 + d^2(c+a-2b) = 0 \\ 4(c-a)(a-b)^2 + d^2(c+b-2a) = 0 \\ 4(b-a)^2 = 3d^2. \end{cases}$$

La question proposée est complètement résolue ; car, s'il n'y a pas deux des coefficiens de xy, xz, yz, qui soient nuls, on pourra faire usage des équations (4), et si deux de ces coefficiens sont nuls, on se servira des équations (6). Dans le cas où les trois coefficiens sont nuls, $d = 0$, et les trois équations précédentes se réduisent à

$$(c-b)(a-b) = 0;\ (c-a)(a-b) = 0;\ (a-b) = 0,$$

ou à ces trois-ci $a = b$; $a = c$; $b = c$, dont une suffit.

Note sur le développement des puissances des sinus et des cosinus, en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

Par M. Poisson.

On propose de développer $\cos^m . x$, en série de cosinus des multiples de l'arc x.

Pour cela, soit

$$\cos . x + \sin . x . \sqrt{-1} = u, \quad \cos . x - \sin . x . \sqrt{-1} = v;$$

nous aurons

$$2 . \cos . x = u + v;$$

par conséquent

$$2^m . \cos^m . x = (u + v)^m,$$

ou bien, en développant par la formule du binome,

$$2^m . \cos^m . x = u^m + m . u^{m-2} . uv + \frac{m . m-1}{2} . u^{m-4} . u^2 v^2 + \&c.$$

Mais on a

$$uv = \cos^2 . x + \sin^2 x = 1;$$

et d'après la formule de Moivre, on a aussi, quel que soit l'exposant m,

$$u^m = (\cos . x + \sin . x . \sqrt{-1})^m = \cos . mx + \sin . mx \sqrt{-1}$$

Substituant ces valeurs dans celle de $2^m . \cos^m . x$, il vient

$$\left.\begin{aligned} 2^m . \cos^m . x = \cos . mx + m . \cos . (m-2) x \\ + \frac{m . m-1}{2} . \cos . (m-4) x + \&c. \\ + \sqrt{-1} \left(\begin{aligned} \sin . mx + m . \sin . (m-2) x \\ + \frac{m . m-1}{2} . \sin . (m-4) x + \&c. \end{aligned} \right) \end{aligned}\right\} (1)$$

Ainsi la valeur complette de $2^m . \cos^m . x$ se compose de deux séries dont la loi est évidente.

Au lieu de développer $(u+v)^m$ suivant les puissances de v, on peut écrire

$$2^m . \cos^m . x = (v+u)^m,$$

et développer suivant les puissances de u. On a de cette manière

$$2^m . \cos^m . x = v^m + m v^{m-2} . vu + \frac{m . m-1}{2} . v^{m-4} . v^2 u^2 + \&c.$$

donc, à cause de $uv = 1$ et de

$$v^m = (\cos . x - \sin . x . \sqrt{-1})^m = \cos . mx - \sin . mx . \sqrt{-1},$$

qui a lieu pour tous les exposans, on aura

$$\left.\begin{array}{l} 2 . \cos^m . x = \cos . mx + m . \cos . (m-2)\, x \\ \qquad + \dfrac{m . m-1}{2} . \cos . (m-4)\, x + \&c. \\ \qquad - \sqrt{-1}\left(\begin{array}{l} \sin . mx + . \sin . (m-2)\, x \\ + \dfrac{m . m-1}{2} . \sin . (m-4)\, x + \&c. \end{array}\right) \end{array}\right\} \quad (2)$$

Cette seconde expression de $2^m . \cos^m . x$ ne diffère de la première que par le signe de $\sqrt{-1}$.

Maintenant j'observe que si m est un nombre entier, positif ou négatif, la quantité $2^m . \cos^m . x$ n'est susceptible que d'une seule valeur pour chaque valeur de x ; ces deux expressions (1) et (2) doivent donc être équivalentes, et si on les ajoute, on aura le double de la valeur de $2^m . \cos^m . x$; ajoutant donc et divisant par 2, on aura simplement

$$\left.\begin{array}{l} 2^m . \cos^m . x = \cos . mx + m . \cos . (m-2)\, x \\ \qquad + \dfrac{m . m-1}{2} . \cos . (m-4)\, x \\ \qquad + \&c. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ce résultat est la formule connue, que l'on donne ordinairement sans aucune restriction, et qui, cependant, ne convient en général qu'au cas de l'exposant entier. En effet, quand m est fractionnaire, la quantité $2^m \cdot \cos^m . x$ a plusieurs valeurs pour chaque valeur de x. Or, les expressions (1) et (2) correspondent à deux de ces valeurs qui diffèrent entr'elles par le signe de $\sqrt{-1}$, de sorte qu'en les ajoutant et divisant par 2, on retrouve la partie réelle, commune à ces deux valeurs, et non pas une valeur de $2^m \cdot \cos^m . x$. Il en faut excepter les cas particuliers où la valeur de x rend nul le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans les formules (1), (2); dans ces cas, les trois formules coïncident, et la formule (3) donne la valeur de $2^m \cdot \cos^m . x$; mais, dans tout autre cas, cette formule induira en erreur sur la vraie valeur de cette quantité.

Supposons, par exemple, $m = \frac{1}{3}$ et $x = 200°$; on aura

$$\cos . 200° = -1, \quad \text{et} \quad 2^m . \cos^m . x = \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{-1},$$

quantité dont les trois valeurs sont

$$-\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{2}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Or, à cause de

$$\cos . (m-2i)\, x = \cos . \left(\frac{200°}{3} - 2i . 200°\right) = \cos . \frac{200°}{3},$$

i désignant un nombre entier quelconque, la formule (3) donnera

$$\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{-1} = \cos.\frac{200°}{3}\left(\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right) \\ + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right) + \&c. \end{array}\right)$$

la série comprise entre les parenthèses est le développement de $(1+1)^{\frac{1}{3}}$; d'ailleurs $\cos . \frac{200°}{3} = \sin . \frac{100°}{3} = \frac{1}{2}$; on auroit donc pour résultat $\frac{1}{2}(1+1)^{\frac{1}{3}}$ ou $\frac{1}{2} . \sqrt[3]{2}$, qui

n'est point une de nos trois valeurs, mais bien la demi-somme de deux d'entr'elles. La formule (3) peut donner la première de ces trois valeurs; mais il faut pour cela y faire $x = 3 . 200°$. On a toujours $\cos . x = -1$, et la formule (3) devient

$$\sqrt[3]{2} . \sqrt{-1} = \cos . 200°\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) + \&c.\right) = -\sqrt[3]{2}.$$

Chacune des formules (1) et (2) donnera les trois valeurs de $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{-1}$, en y faisant successivement

$$x = 200°, \quad x = 3 . 200°, \quad x = 5 . 200°.$$

En général, si m est une fraction de la forme $\frac{p}{n}$, les équations (1) et (2) donneront les n valeurs de la quantité

$$2^m . \cos^m . x \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{2^p . \cos^p . x},$$

en y mettant successivement, à la place des x, les n quantités

$$x, x + 400°, x + 2 . 400°, x + 3 . 400°, \ldots x + (n-1) . 400°,$$

pour lesquelles le premier membre reste toujours

$$\sqrt[n]{2^p . \cos^p . x}.$$

La véritable expression de $\cos^m . x$ étant connue, on en déduit celle de $\sin^m . x$, en y substituant $100° - x$, à la place de x, car on a

$$\cos^m . (100° - x) = \sin^m . x.$$

Or, i étant un nombre entier, on a

$$\begin{aligned}
\cos . (m-2i) . (100° - x) &= \cos (m-2i) . 100° \ . \cos (m-2i) x \\
&+ \sin (m-2i) . 100° \ . \sin (m-2i) x, \\
\sin . (m-2i) . (100° - x) &= \sin (m-2i) . 100° \ . \cos (m-2i) x \\
&- \cos (m-2i) . 100° \ . \sin (m-2i) x,
\end{aligned}$$

$$\cos . (m-2i) . 100° = \pm \cos . m . 100°,$$
$$\sin (m-2i) . 100° = \pm \sin . m . 100°;$$

les signes supérieurs ayant lieu, quand i est pair, et les signes inférieurs, quand i est impair; par conséquent

$$\cos.(m-2i).(100^\circ-x)=\pm[\cos.m.100^\circ.\cos.(m-2i)x + \sin.m.100^\circ.\sin.(m-2i)x],$$

$$\sin.(m-2i).(100^\circ-x)=\pm[\sin.m.100^\circ.\cos.(m-2i)x - \cos.m.100^\circ.\sin.(m-2i)x];$$

au moyen de ces valeurs, l'équation (1) donne

$$2^m.\sin^m.x=\left(\cos.m.100^\circ+\sqrt{-1}.\sin.m\,100^\circ\right).\left(\cos.mx - m.\cos.(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}.\cos.(m-4)x-\&c.\right)$$
$$+\left(\sin.m.100^\circ-\sqrt{-1}.\cos.m.100^\circ\right).\left(\sin.mx - m.\sin.(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}.\sin.(m-4)x-\&c.\right)$$

formule qui convient à toutes les valeurs de m, entières ou fractionnaires. L'équation (2) en fourniroit une semblable, et qui ne différeroit de celle-ci que par le signe de $\sqrt{-1}$. Lorsque m est entier, il est permis d'ajouter ces deux formules, ce qui donne le double de la quantité $2^m.\sin^m.x$, débarrassée du radical $\sqrt{-1}$; divisant cette somme par 2, on a

$$2^m.\sin^m x=\cos.m.100^\circ.\left(\cos.mx-m.\cos.(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}.\cos.(m-4)x-\&c.\right)$$
$$+\sin.m.100^\circ.\left(\sin.mx-m.\sin.(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}.\sin(m-4)x-\&c.\right);$$

et l'on ne doit pas oublier que cette formule n'a lieu sans restriction, que pour les seules valeurs entières de m.

Si cet exposant est pair, on aura

$$\sin.m.100^\circ=0, \qquad \text{et } \cos.m.100^\circ=\pm 1,$$

le signe + ayant lieu quand m est multiple de 4; et le signe –, quand il est simplement multiple de 2; donc alors la formule se réduit à

$$2^m.\sin^m.x=\pm\left(\cos.mx-m.\cos(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}.\cos.(m-4)x-\&c.\right)$$

Si, au contraire, m est impair, on aura

$$\cos.m.100^\circ = 0, \text{ et } \sin.m.100^\circ = \pm 1,$$

le signe $+$ ayant lieu quand m est de la forme $4n+1$, et le signe $-$, quand il est de la forme $4n-1$; par conséquent la formule devient :

$$2_m.\sin^m.x = \pm\left(\sin.mx - m.\sin.(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}.\sin.(m-4)x - \&c.\right).$$

Ces deux derniers résultats sont les formules connues qui donnent les puissances entières, paires ou impaires, des sinus, en séries de cosinus ou de sinus d'arcs multiples.

Sur les équations du quatrième degré.

Par M. Bret, *professeur de mathématiques transcendantes, au Lycée de Grenoble.*

Je rappelle en peu de mots la méthode de la résolution des équations du quatrième degré, donnée par Lagrange aux leçons de l'Ecole Normale.

On a $$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

On fait $x = y + z + t =$ somme des premières puissances $= Sy$.

élevant au carré, on a

$x^2 =$ la somme des carrés $+$ deux fois la somme des rectangles $= Sy^2 + Syz$.

Je fais passer Sy^2 dans le premier membre, et j'élève de nouveau l'équation au carré, on obtient

$$x^4 - 2x^2 Sy^2 + (Sy^2)^2 = 4Sy^2z^2 + 8yztSy;$$

donc $$x^4 - 2x^2 Sy^2 - 8yztx + (Sy^2)^2 - 4S(y^2z^2) = 0.$$

Comparant cette équation avec la proposée, on a

$$p = -2Sy^2,\ r = (Sy^2)^2 - 4S(y^2z^2),\ q = -8yzt,$$

ou $$Sy^2 = -\frac{p}{2},\ S(y^2z^2) = \frac{p^2 - 4r}{16},\ yzt = -\frac{q}{8},$$

par conséquent, l'équation du troisième degré qui détermine y^2, z^2, t^2, est

$$u^3 + \frac{p}{2}u^2 + \frac{p^2-4r}{16}u - \frac{q^2}{64} = 0,$$

changeant u en $\frac{u}{4}$, elle devient

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2-4r)u - q^2 = 0,$$

et représentant par u', u'', u''', les racines de cette équation, on obtient

$$y^2 = \frac{u'}{4},\quad z^2 = \frac{u''}{4},\quad t^2 = \frac{u'''}{4};$$

d'où $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{u'}$, $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{u''}$, $t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{u'''}$.

Or, les valeurs véritables de x, z, t, doivent satisfaire aux équations

$$p = -2Sy^2,\ r = Sy^2 - 4S(y^2z^2),\ q = -8yzt;$$

donc on connoîtra les signes qui doivent affecter y, z, t, au moyen de l'équation $q = -8yzt$. On trouve

$$\sqrt{u'}\sqrt{u''}\sqrt{u'''} = -q,$$

c'est-à-dire qu'il faut prendre le produit $\sqrt{u'}\sqrt{u''}\sqrt{u'''}$ de signe contraire à q. Il se présente maintenant trois cas à discuter; la réduite peut avoir deux racines négatives et une positive, trois racines positives, une racine positive et deux imaginaires. Dans le premier cas, soit $-\alpha$, $-\beta$, les deux racines négatives, et γ la racine positive, on a

$$\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\sqrt{\gamma} = -q,\ \text{ou}\ \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma} = q;$$

donc les racines de l'équation du quatrième degré sont

$$\text{pour } q \text{ positif}\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''})\\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''})\\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''})\\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''})\end{aligned}\right.$$

$$\text{pour } q \text{ négatif}\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''})\\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''})\\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''})\\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u''})\end{aligned}\right.$$

Dans les deux autres cas, on a évidemment

$$\text{pour } q \text{ positif} \left\{ \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}) \end{aligned} \right.$$

$$\text{pour } q \text{ négatif} \left\{ \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}) \end{aligned} \right.$$

Les racines que l'on a données jusqu'à présent, sont

$$\text{pour } q \text{ positif} \left\{ \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} + \sqrt{u'} + \sqrt{u'''}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}) \end{aligned} \right.$$

pour q négatif, les mêmes racines prises avec le signe —.

Donc ces formules sont en défaut dans toutes les équations du quatrième degré, dont les réduites auront deux racines négatives.

Des Nombres figurés ; par M. Barruel, *bibliothécaire de l'Ecole Polytechnique.*

Nous ne donnons ici la théorie de ces nombres, que pour faire voir que l'on peut trouver la loi de leur sommation d'une manière beaucoup plus abrégée qu'on ne le fait ordinairement; ensuite pour en montrer l'application à la loi des coefficiens du binôme, dont la démonstration devient par là plus simple, plus directe, et pour laquelle on n'a pas besoin de recourir aux *combinaisons*, qui n'y tiennent que d'une manière très-éloignée, et que d'ailleurs les commençans ont beaucoup de peine à bien concevoir. Nous verrons tout-à-l'heure que c'est dans l'observation seule de ce qui se passe en multipliant un binôme un certain nombre de fois par lui-même, que l'on doit chercher la démonstration de cette dernière loi.

Avant de passer aux nombres figurés, posons d'abord les remarques suivantes :

1^ere^ *remarque.* Soit la suite 1×2, 2×3, 3×4, 4×5 : pour en prendre la somme, on pourroit employer la méthode des coefficiens indéterminés; mais cela ne fourniroit qu'un résultat isolé, dont on ne pourroit tirer aucune conséquence pour prendre la somme d'autres suites semblables, qu'il faudroit chercher de la même manière. Pour sommer donc cette suite, nous allons employer une autre méthode qui lie ces diverses sommes entre elles, et qui en fasse découvrir la loi. En effet, observons que l'on a

$$1.2 = \ldots\ldots = 1.2.\tfrac{3}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2\\+2.3\end{array}\right\} = 1.2.\tfrac{3}{3}+2.3.\tfrac{3}{3} = 2.3.\tfrac{4}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2\\+2.3\\+3.4\end{array}\right\} = 2.3.\tfrac{4}{3}+3.4.\tfrac{3}{3} = 3.4.\tfrac{5}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2\\+2.3\\+3.4\\+4.5\end{array}\right\} = 3.4.\tfrac{5}{3}+4.5.\tfrac{3}{3} = 4.5.\tfrac{6}{3}$$

Ainsi de suite. Donc, si le nombre des termes est n', le dernier terme sera $n'(n'+1)$, et par conséquent la somme S' donnera

$$S' = n'(n'+1)\,\frac{(n'+2)}{3} \qquad (M).$$

2° *remarque*. Soit la suite $1\times2\times3$, $2\times3\times4$, $3\times4\times5$, $4\times5\times6$: pour en prendre la somme, observons encore que l'on a

$$1.2.3 \quad = \ldots\ldots\ldots = 1.2.3.\tfrac{4}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2.3\\+2.3.4\end{array}\right\} = 1.2.3.\tfrac{4}{4} + 2.3.4.\tfrac{4}{4} = 2.3.4.\tfrac{5}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2.3\\+2.3.4\\+3.4.5\end{array}\right\} = 2.3.4.\tfrac{5}{4} + 3.4.5.\tfrac{4}{4} = 3.4.5.\tfrac{6}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2.3\\+2.3.4\\+3.4.5\\+4.5.6\end{array}\right\} = 3.4.5.\tfrac{6}{4} + 4.5.6.\tfrac{4}{4} = 4.5.6.\tfrac{7}{4}$$

Ainsi de suite. Donc, si le nombre des termes est n'', le dernier terme sera $n''(n''+1)(n''+2)$, et par conséquent la somme S'' donnera

$$S'' = n''(n''+1)(n''+2)\frac{(n''+3)}{4}. \qquad (N)$$

On trouvera de même que la somme S''' de la suite $1\times2\times3\times4$, $2\times3\times4\times5$, $3\times4\times5\times6$, etc., dont le nombre des termes est n''', donne

$$S''' = n'''(n'''+1)(n'''+2)(n'''+3)\frac{(n'''+4)}{5}. \qquad (O)$$

Ainsi de suite pour les valeurs de S^{IV}, S^{V}, etc.

Cela posé, on sait que l'on appelle *nombres figurés*, des nombres qui se forment de la manière suivante. Soit la suite des unités :

$$1, 1, 1, 1, 1,$$

que l'on nomme *nombres constans*. Si l'on prend successivement la somme de ces unités depuis la première jusqu'à chacune des autres, on aura la suite :

$$1, 2, 3, 4, 5, \qquad (A)$$

que l'on nomme *nombres naturels*. Si l'on prend de la même

manière la somme de ces derniers nombres, on formera la suite :

$$1, 3, 6, 10, 15, \qquad (B)$$

que l'on nomme *nombres triangulaires*. Si l'on prend encore de la même manière la somme de ces derniers nombres, on formera la nouvelle suite :

$$1, 4, 10, 20, 35, \qquad (C)$$

que l'on nomme *nombres pyramidaux*. Si l'on prend encore de même la somme de ces derniers nombres, on aura une autre suite :

$$1, 5, 15, 35, 70, \qquad (D)$$

avec laquelle on formera de même de nouveaux nombres, qui eux-mêmes donneront naissance à une nouvelle suite, etc. Voyons à présent comment on peut sommer toutes ces suites.

1°. On voit que, la suite (A) des nombres naturels formant une progression arithmétique, si l'on nomme n le nombre des termes, et S la somme, on a

$$S = n \cdot \frac{n+1}{2} \qquad (P).$$

2°. Comme les termes de la suite (B) des nombres triangulaires se forment chacun en prenant la somme de progressions arithmétiques, dont le nombre des termes augmente successivement d'une unité, il est évident qu'en nommant S' la somme des termes, et en substituant successivement 1, 2, 3, 4, 5, à la place de n dans l'équation (P), il vient

$$S' = \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2}$$

$$S' = \tfrac{1}{2}(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6).$$

Donc, d'après l'équation (M), on a

$$S' = \tfrac{1}{2}(5.6.\tfrac{7}{3})$$

Donc, en appelant n' le nombre des termes, il vient

$$S' = n' \cdot \frac{n'+1}{2} \cdot \frac{n'+2}{3} \qquad (Q)$$

3°. En nommant S'' la somme des termes de la suite (C

des nombres pyramidaux, il n'est pas moins clair que si l'on substitue successivement 1, 2, 3, 4, 5, à la place de n' dans l'équation (Q), on aura

$$S'' = \frac{1(1+1)(1+2)}{2.3} + \frac{2(2+1)(2+2)}{2.3} + \frac{3(3+1)(3+2)}{2.3} +$$
$$+ \frac{4(4+1)(4+2)}{2.3} + \frac{5(5+1)(5+2)}{2.3},$$

$$S'' = \frac{1}{2.3}(1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7).$$

Donc, d'après l'équation (N), on a

$$S'' = \frac{1}{2.3}(5.6.7.\tfrac{8}{4}).$$

Donc, en nommant n'' le nombre des termes, il vient

$$S'' = n'' . \frac{n''+1}{2} . \frac{n''+2}{3} . \frac{n''+3}{4} \qquad (R).$$

4° En nommant S''' la somme des termes de la suite (D) qui vient après les nombres pyramidaux, il est encore évident que si l'on substitue successivement 1, 2, 3, 4, 5, à la place de n'' dans l'équation (R), on aura

$$S''' = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{2.3.4} + \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{2.3.4} + \frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{2.3.4} +$$
$$+ \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{2.3.4} + \frac{5(5+1)(5+2)(5+3}{2.3.4},$$

$$S''' = \frac{1}{2.3.4}(1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + 4.5.6.7 + 5.6.7.8).$$

Donc, d'après l'équation (O), on a

$$S''' = \frac{1}{2.3.4}(5.6.7.8.\tfrac{9}{5}).$$

Donc, en nommant n''' le nombre des termes, il vient

$$S''' = n''' . \frac{n'''+1}{2} . \frac{n'''+2}{3} . \frac{n'''+3}{4} . \frac{n'''+4}{5};$$

ainsi de suite. D'où l'on voit que la loi que suivent les différentes valeurs de S, S', S'', S''', etc., se manifeste assez clairement.

Application à la loi des coefficiens du binôme.

D'abord, on sait qu'après avoir multiplié le binôme $x+a$ un certain nombre de fois par lui-même, pour en obtenir successivement les 2^e, 3^e, 4^e, etc. puissances, et qu'après avoir réuni en un seul terme tous ceux qui contiennent la même puissance de x, on sait, dis-je, et d'ailleurs il est facile de remarquer :

1°. Que le premier terme d'une puissance donnée, quelle qu'elle soit, doit toujours être le premier terme x du binôme, élevé à cette même puissance;

2°. Que les exposans de x vont en diminuant d'une unité dans les termes suivans, et que ceux de a vont au contraire en augmentant d'une unité, à partir du second terme où il commence à entrer;

3°. Que le dernier terme de la puissance donnée doit toujours être le dernier terme a du binôme, élevé à cette même puissance; de sorte qu'en appelant A, B, C, D, E..... les coefficiens des autres termes, on a

$$(x+a)^m = x^m + Aax^{m-1} + Ba^2x^{m-2} + Ca^3x^{m-3} + Da^4x^{m-4} \ldots\ldots +$$

suite dans laquelle il ne s'agit que de déterminer les coefficiens A, B, C, D......, et de trouver la loi qu'ils suivent.

Pour cela, observons d'abord en général que, pour élever le binôme $x+a$ à la puissance $n+1$, il faut multiplier $(x+a)^n$ par $x+a$; ce qui donne, en supposant les coefficiens P, Q, R..... déterminés,

$$(x+a)^{n\pm 1} = (x+a)(x+a)^n = (x+a)(x^n + Pax^{n-1} + Qa^2x^{n-2} + Ra^3x^{n-3} \ldots\ldots$$

$$(x+a)^{n\pm 1} = x^{n\pm 1} + (P+1)ax^n + (Q+P)a^2x^{n-1} + (R+Q)a^3x^{n-2} \ldots\ldots\ldots + a^{n+1}$$

On voit par là que telle est la loi que suivent les coefficiens de $(x+a)^{n+1}$; que, pour avoir chacun d'eux, il faut ajouter le coefficient du terme correspondant dans la puissance, dont le degré a une unité de moins, avec le coefficient du terme pré-

cédent. Donc, si l'on a les puissances successives du binôme $x+a$, telles que

$$=x^m + A\ ax^{m-1} + B\ a^2x^{m-2} + C\ a^3x^{m-3} + D\ a^4x^{m-4} + E\ a^5x^{m-5} \ldots\ldots + a^m$$
$$=x^{m-1} + A'\ ax^{m-2} + B'\ a^2x^{m-3} + C'\ a^3x^{m-4} + D'\ a^4x^{m-5} + E'\ a^5x^{m-6} \ldots\ldots + a^{m-1}$$
$$=x^{m-2} + A''\ ax^{m-3} + B''\ a^2x^{m-4} + C''\ a^3x^{m-5} + D''\ a^4x^{m-6} + E''\ a^5x^{m-7} \ldots\ldots + a^{m-2}$$
$$=x^{m-3} + A'''ax^{m-4} + B'''a^2x^{m-5} + C'''a^3x^{m-6} + D'''a^4x^{m-7} + E'''a^5x^{m-8} \ldots + a^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on aura, d'après la loi précédente,

$$=A'+1 \qquad B=B'+A' \qquad C=C'+B' \qquad D=D'+C' \quad \ldots\ldots$$
$$=A''+1 \qquad B'=B''+A'' \qquad C'=C''+B'' \qquad D'=D''+C'' \quad \ldots\ldots$$
$$=A'''+1 \qquad B''=B'''+A''' \qquad C''=C'''+B''' \qquad D''=D'''+C''' \quad \ldots\ldots$$
$$=A^{IV}+1 \qquad B'''=B^{IV}+A^{IV} \qquad C'''=C^{IV}+B^{IV} \qquad D'''=D^{IV}+C^{IV} \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

Donc, en faisant les substitutions indiquées, et en observant que les dernières lettres accentuées sont chacune égales à l'unité, on a

$$A = 1+1+1+1 \ldots\ldots + 1 = m$$
$$A' = \ldots 1+1+1 \ldots\ldots + 1 = m-1$$
$$A'' = \ldots\ldots 1+1 \ldots\ldots + 1 = m-2$$
$$A''' = \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots + 1 = m-3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=A'+A''+A'''+A^{IV}\ldots + 1 = (m-1)+(m-2)+(m-3)+(m-4)\ldots + 1$$
$$=\ldots A''+A'''+A^{IV}\ldots + 1 = \ldots\ldots (m-2)+(m-3)+(m-4)\ldots + 1$$
$$=\ldots\ldots A'''+A^{IV}\ldots + 1 = \ldots\ldots\ldots (m-3)+(m-4)\ldots + 1$$
$$=\ldots\ldots\ldots A^{IV}\ldots + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots (m-4)\ldots + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=B'+B''+B'''+B^{IV}\ldots + 1. \qquad D = C'+C''+C'''+C^{IV}\ldots + 1$$
$$=\ldots B''+B'''+B^{IV}\ldots + 1, \qquad D' = \ldots C''+C'''+C^{IV}\ldots + 1$$
$$=\ldots\ldots B'''+B^{IV}\ldots + 1 \qquad D'' = \ldots\ldots C'''+C^{IV}\ldots + 1$$
$$=\ldots\ldots\ldots B^{IV}\ldots + 1 \qquad D''' = \ldots\ldots\ldots C^{IV}\ldots + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

De là suit cette autre loi, que chacun des coefficiens A, B, C, D, E.. est égal à la somme des coefficiens qui le précèdent immédiatement dans toutes les puissances inférieures à m. Or, cette loi n'est autre chose que celle des *nombres figurés* (*).

En effet il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que A est formé de la suite des nombres *constans*; que A, A', A'', A'''..... sont la suite des nombres *naturels*; que B, B', B'', B'''..... sont la suite des nombres *triangulaires*; que C, C', C'', C'''..... sont la suite des nombres *pyramidaux*; que D, D', D'', D'''..... sont la suite des nombres de l'ordre suivant, etc.

Donc, 1°. le coefficient A est égal à l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le binôme, c'est-à-dire que l'on a

$$A = m.$$

2°. Puisque $B = A' + A'' + A''' + A^{\text{iv}} \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 =$
$= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots\ldots\ldots\ldots + 1$, ce

---

(*) *Tableau des Nombres figurés.*

		b	d	f	h	k	m	
	1	1	1	1	1	1	1	
a	1	2	3	4	5	6	7	nombres naturels.
c	1	3	6	10	15	21	28	nombres triangulaires.
e	1	4	10	20	35	56	84	nombres pyramidaux.
g	1	5	15	35	70	126	210	
i	1	6	21	56	126	252	462	
l	1	7	28	84	210	462	984.	

Un simple coup-d'œil jeté sur ce tableau, fait reconnoître que les diagonales *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ik*, *lm*.............. sont les coefficiens des puissances 1ere, 2e, 3e........ du binôme.

Note de M. Monge, *examinateur de la marine.*

coefficient B est la somme des nombres naturels dont le nombre des termes est $m-1$. Donc cette somme donne

$$B = m \cdot \frac{m-1}{2}.$$

3°. Puisque l'on a $C = B' + B'' + B''' + B^{iv} \ldots\ldots\ldots + 1$, il est évident que ce coefficient C est la somme des nombres triangulaires, dont le nombre des termes est $m-2$. Par conséquent, puisque cette somme est $n' \cdot \frac{n'+1}{2} \cdot \frac{n'+2}{3}$, si, à la place de n' on substitue $m-2$, on aura

$$C = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}.$$

4°. Puisque l'on a $D = C' + C'' + C''' + C^{iv} \ldots\ldots\ldots + 1$, il n'est pas moins clair que ce coefficient D est la somme des nombres pyramidaux dont le nombre des termes est $m-3$. Par conséquent, puisque cette somme est $n'' \cdot \frac{n''+1}{2} \cdot \frac{n''+2}{3} \cdot \frac{n''+3}{4}$, si à la place de n'' on substitue $m-3$, il viendra,

$$D = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}.$$

5°. Puisque l'on auroit de même $E = D' + D'' + D''' + D^{iv} \ldots + 1$, on voit que ce coefficient E est la somme des nombres qui suivent les nombres pyramidaux, et que cette somme a pour nombre de termes $m-4$. Par conséquent, puisque cette même somme est $n''' \cdot \frac{n'''+1}{2} \cdot \frac{n'''+2}{3} \cdot \frac{n'''+3}{4} \cdot \frac{n'''+4}{5}$, si à la place de n''', on substitue $m-4$, on aura

$$E = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5};$$

ainsi de suite. D'où résulte cette règle connue : *Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque, multipliez celui du terme précédent par l'exposant de* x *dans le même terme, et divisez le produit par le nombre des termes qui précèdent le terme que vous cherchez.*

Démonstration des théorêmes sur la courbure des surfaces, énoncés page 86 du 2e volume de la Correspondance.

Par M. Desjardins, *élève de l'Administration des Poudres et Salpêtres.*

Avant de commencer la démonstration de ces théorêmes, je vais examiner ce qui a lieu quand des surfaces se touchent.

Lorsque deux surfaces se coupent suivant n courbes, en cherchant les équations des projections de leur intersection, il arrive qu'une au moins de ces trois équations est décomposable en n facteurs (*) particuliers ; chacun de ces facteurs étant l'équation de la projection de l'une des n courbes. Si l'on suppose que deux de ces n courbes se réduisent à une seule, les facteurs qui les représentoient deviendront égaux, et parmi les n facteurs il y en aura n-2 différens, et un dernier qui sera élevé au carré. Les surfaces se toucheront alors suivant une courbe, et se couperont suivant les n-2 autres ; si trois facteurs deviennent égaux, auquel cas trois courbes se réduisent à une seule, les deux surfaces ont un contact du deuxième ordre suivant cette courbe, et se coupent suivant les n-3 courbes restantes. L'équation de la projection est alors décomposable en n-3 facteurs différens, et en un autre qui est élevé au cube ; et ainsi de suite. Si enfin ces n courbes se réduisent à une seule, les n facteurs deviennent égaux, et l'équation de la projection est la $n^{\text{ième}}$ puissance de l'un d'eux. Les deux surfaces ont un contact du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre.

Par conséquent, si nous prenons deux surfaces ayant un contact du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre suivant une courbe, et pouvant se couper suivant plusieurs autres, une au moins des trois équations des projections de leur intersection, contiendra en facteur, la puissance $n^{\text{ème}}$ de l'équation de la projection sur le plan que l'on considère, de la courbe suivant laquelle elles ont ce contact. L'autre facteur contiendra le produit des équations des projections sur ce même plan de chacune des courbes suivant lesquelles ces surfaces peuvent encore se couper.

(*) Je dis une au moins, parce qu'il peut arriver que ces n courbes soient placées de telle sorte que leurs projections sur deux des plans coordonnés se réduisent à une courbe unique ; mais alors il y aura n courbes différentes sur le troisième plan coordonné.

Ainsi, si les équations de ces surfaces sont mises sous la forme

$$z=F(x,y) \qquad \text{et} \qquad z=f(x,y),$$

le plan des xy, par exemple, devant satisfaire à la condition énoncée, la projection de leur intersection sur ce plan sera

$$F(x,y)-f(x,y)=0;$$

et si ces surfaces ont un contact du $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ ordre, on devra avoir

$$F(x,y)-f(x,y)=\phi(x,y)^n\,\psi(x,y)=0;$$

$\phi(x,y)=0$ sera l'équation de la projection horizontale de la courbe de contact, et $\psi(x,y)=0$ sera le produit des équations des projections des autres courbes d'intersection.

Réciproquement, si les fonctions F et f satisfont à cette condition, les deux surfaces auront un contact du $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ ordre suivant une courbe (*).

PREMIER THÉORÊME.

Si deux surfaces ont un contact de l'ordre $(n-1)$ suivant une courbe, et si par la tangente en un point quelconque de cette courbe, on mène un plan quelconque, ce plan coupera les deux surfaces suivant deux courbes, qui auront un contact de l'ordre n au point que l'on a pris sur la courbe de contact des deux surfaces.

Soient $z=F(x,y)$, $z=f(x,y)$, les équations des deux surfaces; la projection de leur intersection sur le plan horizontal sera

$$F(x,y)-f(x,y)=0;$$

et si $\varphi(x,y)=0$ est l'équation de la projection de la courbe suivant laquelle elles ont un contact de l'ordre $(n-1)$, on aura, d'après ce qui a été dit,

$$F(x,y)-f(x,y)=\varphi(x,y)^n\,\psi(x,y)=0.$$

(*) La vérité de cette réciproque est incontestable.

La projection horizontale de la tangente à la courbe de contact en un point quelconque x', y', a pour équation

$$y - y' = A(x - x'), \text{ dans laquelle } A = \frac{dy'}{dx'} = \frac{-\varphi'}{\varphi_i}.$$

Les deux surfaces étant situées arbitrairement par rapport au plan des xy, je puis prendre pour plan quelconque, passant par la tangente, le plan qui projette cette tangente, sans rien particulariser.

Cherchant la projection sur le plan des zx, de l'intersection du plan qui projette la tangente, avec les deux surfaces, j'ai

$$z = F(x, y' - Ax' + Ax), \quad z = f(x, y' - Ax' + Ax).$$

Différenciant, il vient

$$\frac{dz}{dx} = F' + F_i A$$

$$\frac{dz}{dx} = f' + f_i A$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F'' + 2 F_i' A + F_{ii} A^2$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f'' + 2 f_i' A + f_{ii} A^2$$

....

$$\frac{d^n z}{dx^n} = F^{(n)'} + \frac{n}{1} F_i^{(n-1)'} A + \frac{n(n-1)}{1.2} F_{ii}^{(n-2)'} A^2 \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots n} F_{(n)_i} A^n$$

$$\frac{d^n z}{dx} = f^{(n)'} + \frac{n}{1} f_i^{(n-1)'} A + \frac{n(n-1)}{1.2} f_{ii}^{(n-2)'} A^2 \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2 1}{1.2\ldots\ldots\ldots n} f_{(n)_i} A^n.$$

Voyons maintenant si ces coefficiens différentiels deviennent égaux chacun à chacun, au point $x'\ y'$; pour cela j'observe que l'on a

$$F(x,y) - f(x,y) = \varphi(x,y)^n \psi(x,y)$$

Différenciant aux différences partielles, on a

$$F' - f' = n\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,n-1}\,\varphi' + \varphi(x,y)^n\,\psi'$$
$$F_{,} - f_{,} = n\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,n-1}\,\varphi_{,} + \varphi(x,y)^n\,\psi_{,}$$
$$F'' - f'' = n(n-1)\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,n-2}\,(\varphi')^2 + \&\ (*)$$
$$F_{,}' - f_{,}' = n(n-1)\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,n-2}\,\varphi'\,\varphi_{,} + \&$$
$$F_{,,} - f_{,,} = n(n-1)\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,n-2}\,(\varphi_{,})^2 + \&$$

....

$$F^{(n)'} - f^{(n)'} = n(n-1)\ldots 3.2.1.\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,0}\,(\varphi')^n + \&$$
$$F_{,}^{(n-1)'} - f_{,}^{(n-1)'} = n(n-1)\ldots 3.2.1.\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{\,0}\,(\varphi')^{n-1}\,\varphi_{,} + \&$$

....

$$F_{(m)'}^{(n-m)'} - f_{(m)'}^{(n-m)'} = n(n-1)\ldots 3.2.1.\,\psi(x,y).\overline{\varphi(x,y)}^{\,0}\,(\varphi')^{n-m}(\varphi_{,})^m + \&$$

....

$$F_{(n)} - f_{(n)} = n(n-1)\ldots 3.2.1\,\psi(x,y)\,\varphi(x,y)^0\,(\varphi')^0\,(\varphi_{,})^n + \&$$

Faisant dans ces expressions $x=x'$, $y=y'$, comme $\varphi(x',y')=0$, on voit que pour ce point les coefficiens des $(n-1)$ premiers ordres, sont égaux, puisque, pour tous ces coefficiens, leur différence est multipliée par $\varphi(x',y')$; ce qui signifie que les deux surfaces ont un contact de l'ordre $(n-1)$.

On a ensuite pour la différence de deux mêmes coefficiens quelconques du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$F_{(m)}^{(n-m)'} - f_{(m)'}^{(n-m)'} = n(n-1)\ldots 3.2.1\,\psi(x',y').(\varphi')^{n-m}\,(\varphi_{,})^m.$$

Maintenant les coefficiens différentiels des deux courbes sont

(*) Tous les termes compris dans le signe & sont multipliés par une puissance de $\varphi(xy)$, plus élevée que celle qui affecte la même fonction dans le premier terme de chaque suite dont ils font partie.

égaux chacun à chacun, jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre, d'après ce qu'on vient d'obtenir; retranchons donc les deux valeurs de $\frac{d^n z}{d x^n}$ l'une de l'autre, nous aurons une série dont le terme général, au coefficient près, sera

$$\left\{ F^{(n-m)'}_{(m)} - f^{(n-m)'}_{(m)'} \right\} A^m.$$

Mais $A = \frac{-\varphi'}{\varphi_{\prime}}$, ce terme deviendra donc égal à

$$n(n-1)\ldots 3.2.1\,\psi(x',y')(\varphi')^n(\pm 1),$$ selon que m sera positif ou négatif.

La différence des deux coefficiens de l'ordre n sera par conséquent

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.\psi(x',y')(\varphi')^n \left\{ 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \& \right\}$$

Mais d'après une propriété connue des coefficiens du binôme de Newton, quel que soit l'exposant entier positif, la somme des coefficiens de rang pair est égale à la somme des coefficiens de rang impair; et comme dans cette série ces deux sommes sont de signes contraires, il s'ensuit que la différence des deux coefficiens de l'ordre n est nulle; par conséquent les projections des deux courbes ont un contact de l'ordre n au point $x'\,y'$. Ces deux courbes planes ont donc elles-mêmes ce contact.

C. Q. F. D.

Deuxième Théorème.

Etant donnée une surface courbe quelconque et un point P sur cette surface, soient menés par ce point un plan tangent à la surface et une suite de plans sécans parallèles au plan tangent. Deux courbes quelconques C et C' passant par le point de contact P, rencontrent chacun des plans sécans en deux points c et c'; si on fait mouvoir la section de la surface dans son

plan, de manière que chacun des points de cette section parcourre une droite parallèle et égale à celle qui unit les deux points c et c', *le lieu des sections parallèles transportées chacune dans son plan d'après la même loi, est une nouvelle surface qui est osculatrice de la surface donnée.*

Démonstration.

Soit $z = F(x,y)$ l'équation de la surface courbe donnée. Je lui mène un plan tangent, et je prends le plan des x,y, parallèle à ce plan tangent. J'appelle a, b, c, les coordonnées du point de contact. Il faudra que l'on ait $c = F(a,b)$, et le plan tangent ayant pour équation $z = c$, on aura encore

$$\frac{d.F(a,b)}{da} = 0 \qquad \frac{d.F(a,b)}{db} = 0 \qquad (*)$$

Si par le point a, b, c je fais passer deux courbes quelconques, leurs équations pourront être mises sous la forme

$$x - a = (z - c)\pi(z), \quad y - b = (z - c)\varpi(z)$$

pour la première, et pour la deuxième,

$$x - a = (z - c)\psi(z), \quad y - b = (z - c)\varphi(z)$$

Je coupe la surface et ces deux courbes par un plan $z = \gamma$ parallèle au plan tangent : j'ai pour projection horizontale de la section $\gamma = F(x, y)$ qui représente la courbe CD.

La première courbe est coupée en un point dont la projection M a pour coordonnées

$$x = a + (\gamma - c)\pi(\gamma) \text{ et } y = b + (\gamma - c)\varpi(\gamma)$$

La deuxième est coupée en un point projeté en N, dont les coordonnées sont

$$x = a + (\gamma - c)\psi(\gamma) \text{ et } y = b + (\gamma - c)\varphi(\gamma).$$

(*) Si les plans des coordonnées étoient donnés, ces deux équations et celle-ci $c = F(a,b)$ serviroient à déterminer les coordonnées a, b, c du point où le plan tangent est parallèle au plan des xy.

Pendant que chaque point de la section de la surface par le plan horizontal $z = \gamma$ parcourt une ligne parallèle et égale à celle qui unit les deux points d'intersection de ce même plan avec les deux courbes données, il est évident que chaque point de la projection CD de cette section parcourt une ligne égale et parallèle à MN, et cette courbe prend la position $C'D'$.

Cherchons donc l'équation de la courbe $C'D'$ qui est la projection horizontale de la section transportée d'après la loi donnée.

Il est clair qu'il suffit, pour cela, de substituer dans l'équation obtenue de la courbe CD, au lieu de x et y, $x + M'R'$ et $y + N'R'$, mais $M'R' = MR = AQ - AP = (\gamma - c)(\psi(\gamma) - \pi(\gamma))$ et $N'R' = NR = NQ - MP = (\gamma - c)(\varphi(\gamma) - \varpi(\gamma))$. Par conséquent l'équation de $C'D'$ sera

$$\gamma = F\left(x + (\gamma - c)(\psi(\gamma) - \pi(\gamma)),\ y + (\gamma - c)(\varphi(\gamma) - \varpi(\gamma))\right).$$

Si l'on joint à cette équation celle-ci $z = \gamma$, on aura les équations de la section de la surface par un plan quelconque parallèle au plan tangent, transportée suivant la loi donnée.

Eliminant γ entre ces deux équations, j'aurai l'équation de la surface, lieu de toutes les sections transportées d'après la même loi. Cette équation est :

$$z = F\left(x + (z - c)(\psi(z) - \pi(z)),\ y + (z - c)(\phi(z) - \varpi(z))\right).$$

Il s'agit de prouver à présent que cette surface est osculatrice de la première au point a, b, c. Je fais, pour abréger

$$(z - c)(\psi(z) - \pi(z)) = fz, \text{ et } (z - c)(\phi(z) - \varpi(z)) = \mathrm{f}z,$$

et j'ai :
$$z = F(x + fz, y + \mathrm{f}z)$$

Différenciant aux différences partielles, j'ai

$$p = (1 + pf'z)\,F' + p\,\mathrm{f}'z\,F_{,} \quad (*)$$
$$q = qf'z\,F' + (1 + q\,\mathrm{f}'z)\,F_{,}$$

(*) Je note le coefficient différentiel partiel du $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction F, pris en regardant $x + fz$ comme une seule variable, par F^{n}; le coefficient du même ordre pris par rapport à $y + \mathrm{f}z$ par F_{n}; et enfin F^{m}_{n} indique le coefficient différentiel de F pris m fois par rapport à $x + fz$, et n fois par rapport à $y + \mathrm{f}z$.

$$r=(1+pf'z)^2F''+p\mathrm{f}'z(1+pf'z)F'_{\prime}+p^2f''zF'+rf'zF'+$$
$$+p\mathrm{f}'z(1+pf'z)F'_{\prime}+p^2(\mathrm{f}'z)^2F_{\prime\prime}+p^2\mathrm{f}''zF_{\prime}+r\mathrm{f}'zF_{\prime}.$$

$$s=qf'z(1+pf'z)F''+(1+q\mathrm{f}'z)(1+pf'z)F'_{\prime}+pqf''zF'+sf'zF'+$$
$$+pq\mathrm{f}'zf'zF'_{\prime}+p\mathrm{f}'z(1+q\mathrm{f}'z)F_{\prime\prime}+pq\mathrm{f}''zF_{\prime}+s\mathrm{f}'zF_{\prime}.$$

$$t=q^2(f'z)^2F''+qf'z(1+q\mathrm{f}'z)F'_{\prime}+q^2f''zF'+tf'zF'+$$
$$+qf'z(1+q\mathrm{f}'z)F'_{\prime}+(1+q\mathrm{f}'z)^2F_{\prime\prime}+q^2\mathrm{f}''zF_{\prime}+t\mathrm{f}'zF_{\prime}$$

Je fais dans ces expressions $x=a$, $y=b$, $z=c$, et j'observe auparavant que les fonctions $f\,z$ et $\mathrm{f}\,z$ s'annullant dans cette hypothèse, les quantités F', $F_{\prime}$, F'', $F'_{\prime}$, et $F_{\prime\prime}$ deviennent respectivement

$$\frac{dF(a,b)}{da},\ \frac{d.F(a,b)}{db},\ \frac{d^2F(a,b)}{da^2},\ \frac{d^2F(a,b)}{da\,db}\ \text{et}\ \frac{d^2F(a,b)}{db^2}\ (*).$$

On se convaincra aisément de cette vérité, en développant d'abord par le théorême de Taylor, $F(x+fz, y+\mathrm{f}z)$, puis en différenciant le développement, et faisant après

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c;$$

ce que je n'ai pas fait pour abréger le calcul.

D'abord l'on a $\qquad F'=0, \qquad\qquad F_{\prime}=0,$

puisque $\dfrac{d.F(a,b)}{da}=0$, et $\dfrac{d.F(a,b)}{db}=0$; il vient donc

$$p=0, \qquad\qquad q=0;$$

ce qui signifie que les deux surfaces sont tangentes au point a, b, c, résultat évident d'après la génération de la dernière surface.

L'on a, en outre,

$$r=\frac{d^2F(a,b)}{da^2},\ s=\frac{d^2F(a,b)}{da\,db}\ \text{et}\ t=\frac{d^2F(a,b)}{db^2};$$

ce qui prouve que les deux surfaces sont osculatrices au même point.

(*) Je n'entends, par ces expressions, que ce que deviennent les divers coefficiens différentiels partiels de $F(x,y)$, lorsqu'on y a fait $x=a$, $y=b$, $z=c$.

On est sûr qu'elles n'ont point alors de contact du troisième ordre, car on trouve, en différenciant r par rapport à x, et faisant $x = a$, $y = b$, $z = c$:

$$u = \frac{d^3 F(a,b)}{d a^3} + 3\left(\frac{d^2 F(a,b)}{d a^2}\right)^2 . f' c$$

$$+ 3 \frac{d^2 F(a,b)}{d a^2} . \frac{d^2 F(a,b)}{d a\, db} . f' c.$$

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Par M. Puissant.

On trouve à la suite d'un petit traité de trigonométrie sphérique que M. Hachette a donné dans le n°. 8 du premier volume de cette Correspondance, la démonstration d'un théorême de M. Legendre, sur les triangles sphériques dont les trois côtés sont très-peu courbes, lequel est fort utile dans les opérations géodésiques. Je pense qu'il n'est pas moins intéressant de faire connoître le parti que l'on peut tirer de quelques formules de trigonométrie, pour résoudre un triangle sphérique, dont un côté seulement est très-petit, par rapport au rayon de la sphère; parce que c'est de là que dépend la détermination des latitudes et longitudes des principaux lieux terrestres qui ont été liés entr'eux par une chaîne de triangles, et que l'on se propose de projeter sur une carte.

Par exemple, soient PM, PM' (*fig.* 2), deux méridiens de la terre supposée sphérique, et P le pôle; L la latitude du point M; L' celle du point M'; P la différence de longitude de ces mêmes points, ou l'angle au pôle; enfin V, V' les inclinaisons de la *ligne géodésique* $MM' = \phi$ sur les méridiens respectifs PM, PM', ou ses *azimuths*. On demande de déterminer L', V', et P, lorsque L, V et P sont connus.

On voit évidemment qu'il s'agit de résoudre un triangle sphérique dont on connoît deux côtés et l'angle compris, et c'est ce qui ne présente en général aucune difficulté. Mais comme un de ces côtes est supposé très-petit par rapport aux deux autres, la latitude L' et l'azimuth V' cherchés, diffèrent toujours très-peu

respectivement de la latitude L et de l'angle azimuthal V connus; et parce que les tables de logarithmes ne comportent qu'une exactitude limitée, il est plus convenable de calculer les valeurs de $L' - L$ et de $V' - V$, et de substituer à cet effet aux formules rigoureuses applicables au cas dont il s'agit, des formules approximatives qui soient moins dépendantes de l'erreur des tables : or, c'est à quoi l'on parvient par la voie des séries, ainsi que je vais le faire voir.

Il est démontré à la page 276 du premier volume de cette Correspondance, que dans un triangle sphérique ABC (*fig.* 3), on a les relations suivantes :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cot B \sin C = \cot b \sin a - \cos a \cos C$$
$$\cot C \sin B = \cot c \sin a - \cos a \cos B;$$

mais ces deux dernières donnent

$$\text{tang}\, B = \frac{\sin C}{\cot b \sin a - \cos a \cos C}$$

$$\text{tang}\, C = \frac{\sin B}{\cot c \sin a - \cos a \cos B},$$

et en adoptant la notation que présente la *fig.* 2, l'on a

$$(1) \qquad \sin L' = \sin L \cos \varphi - \cos V \cos L \sin \varphi$$

$$(2) \qquad \text{tang}\, V' = \frac{\sin V}{\text{tang}\, L \sin \varphi + \cos V \cos \varphi}$$

$$(3) \qquad \text{tang}\, P = \frac{\sin V \sin \varphi}{\cos L \cos \varphi + \cos V \sin L \sin \varphi}.$$

Proposons-nous d'abord d'ordonner le second membre de l'équation (1), par rapport aux puissances ascendantes de l'arc φ: or, on a, comme l'on sait,

$$(m) \qquad \sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} \ldots, \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \ldots.$$

et puisque φ est très-petit par rapport au rayon de la sphère, on

peut ne prolonger le développement que jusques aux termes en φ^3 inclusivement ; on a donc sur-le-champ

$$(4)\qquad \sin L' = \sin L - \cos V \cos L . \varphi - \tfrac{1}{2} \sin L . \varphi^2 + \tfrac{1}{6} \cos V \cos L . \varphi^3 .$$

Un des moyens simples d'avoir la valeur de L' en série, procédant de même suivant les puissances de φ, est de faire

$$(5)\qquad L' = L + P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3 + \ldots .$$

P, Q, R, étant des coefficiens indéterminés, dont on obtiendra la valeur ainsi qu'il suit :

Prenant le sinus de chaque membre de cette dernière équation, et rejetant toujours les termes au-dessus de l'ordre φ^3, on aura

$$\sin L' = \sin L \cos (P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3) + \cos L \sin (P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3)$$

ou en vertu des séries (m),

$$\sin L' = \sin L \left(1 - \frac{P^2 \varphi^2}{2} - PQ\varphi^3 \right) + \cos L \left(P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3 - \frac{P^3 \varphi^3}{6} \right);$$

et par conséquent

$$(6)\ \sin L' = \sin L + \cos L . P\varphi + \cos L . Q\varphi^2 + \cos L . \left(R - \frac{P^3}{6} \varphi^3 \right) - \tfrac{1}{2} \sin L . P^2 \varphi^2 - \sin L . PQ\varphi^3 .$$

égalant cette valeur de sin L' à celle (4), on aura une équation identique de laquelle on déduira les valeurs des coefficiens P, Q, R, et l'on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$P = -\cos V$$
$$Q = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} L \sin^2 V$$
$$R = \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 L\right) \cos V \sin^2 V ;$$

donc la série (5) sera

$$L' = L - \varphi \cos V - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \sin^2 V \operatorname{tang} L$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varphi^3 \cos V \sin^2 V . (\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 L).$$

Telle est celle qui, sur la sphère, donne la latitude du point M', connoissant la plus courte distance MM', ou φ, l'azimuth V compté du nord à l'est, et la latitude L du point M de départ.

Pour trouver la différence des azimuths V', V, par un procédé analogue au précédent, on substituera dans la formule

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{\operatorname{tang} V' - \operatorname{tang} V}{1 + \operatorname{tang} V' \operatorname{tang} V},$$

pour tang V' sa valeur (2), et l'on aura

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{\sin V \cos V . (1 - \cos\varphi) - \sin V \operatorname{tang} L \sin\varphi}{1 - \cos^2 V . (1 - \cos\varphi) + \cos V \operatorname{tang} L \sin\varphi},$$

et à cause des séries (m)

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{\sin V \cos V . \dfrac{\varphi^2}{2} - \sin V \operatorname{tang} L . \left(\varphi - \dfrac{\varphi^3}{6}\right)}{1 - \cos^2 V . \dfrac{\varphi^2}{2} + \cos V \operatorname{tang} L . \left(\varphi - \dfrac{\varphi^3}{6}\right)},$$

réduisant le second membre en série par la formule du binome, on obtiendra après les réductions

$$\operatorname{tang}(V' - V) = -\varphi \sin V \operatorname{tang} L + \varphi^2 \sin V \cos V (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L)$$
$$- \varphi^3 \sin V \cos^2 V \operatorname{tang} L . (1 + \operatorname{tang}^2 L)$$
$$+ \frac{\varphi^3}{6} \sin V \operatorname{tang} L;$$

mais en général

$$V' - V = \operatorname{tang} (V' - V) - \frac{\operatorname{tang}^3 (V' - V)}{3} + \ldots .$$

donc en faisant attention que $\sin^3 V = \sin V(1 - \cos^2 V)$

$$V' = V - \varphi \sin V \operatorname{tang} L + \varphi^2 \sin V \cos V.\left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L\right)$$
$$- \varphi^3 \sin V \cos^2 V.\left(1 + \tfrac{4}{3} \operatorname{tang}^2 L\right)$$
$$+ \varphi^3 \sin V \operatorname{tang} L.\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^2 L\right),$$

Cette formule fera donc connoître l'azimuth V'.

Il reste à obtenir la différence P de longitude : pour cet effet, l'on substituera dans l'équation (3) pour tang φ sa valeur en série, et l'on aura d'abord

$$\operatorname{tang} P = \frac{\sin V \operatorname{tang} \varphi}{\cos L + \cos V \sin L \operatorname{tang} \varphi}$$
$$= \frac{\sin V.\left(\varphi + \dfrac{\varphi^3}{3}\right)}{\cos L.\left(1 + \cos V \operatorname{tang} L.\left(\varphi + \dfrac{\varphi^3}{3}\right)\right)}$$

puis développant en série, il viendra

$$\operatorname{tang} P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L} - \varphi^2 \frac{\sin V \cos V \operatorname{tang} L}{\cos L}$$
$$+ \frac{\varphi^3}{3} \frac{\sin V}{\cos L} + \varphi^3 \frac{\sin V \cos^2 V \operatorname{tang}^2 L}{\cos L},$$

et parce que

$$P = \operatorname{tang} P - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 P + \ldots .$$

on aura

$$P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L} - \varphi^2 \frac{\sin V \cos V \operatorname{tang} L}{\cos L}$$
$$+ \varphi^3 \left(\frac{1}{3} \frac{\sin V}{\cos L} + \frac{\sin V \cos^2 V \operatorname{tang}^2 L}{\cos L} - \frac{1}{3} \frac{\sin^3 V}{\cos^3 L} \right);$$

mais

$$\sin^3 V = \sin V(1 - \cos^2 V), \text{ et } \frac{1}{\cos^3 L} = \frac{1 + \operatorname{tang}^2 L}{\cos L},$$

donc toute simplification faite,

$$P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L} - \varphi^2 \frac{\sin V \cos V \operatorname{tang} L}{\cos L}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin V \cos^2 V . (4 \operatorname{tang}^2 L + 1)$$
$$- \tfrac{1}{3}\varphi^3 \frac{\sin V}{\cos L} \operatorname{tang}^2 L.$$

Le problême est donc complètement résolu : j'observerai cependant que la valeur de P seroit plus simple, si on la rendoit fonction de la latitude L' : en effet, dans le triangle sphérique PMM', fig. 2, on a évidemment

$$\sin P = \frac{\sin \varphi \sin V}{\cos L'} = \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) \frac{\sin V}{\cos L'};$$

mais $$P = \sin P + \frac{\sin^3 P}{6} + \ldots.$$

donc

$$P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L'} - \varphi^3 \frac{\sin V}{\cos L'} . \left(\frac{1}{6} - \frac{\sin^2 V}{\cos^2 L'}\right).$$

J'ai fait voir ailleurs comment on obtenoit ces séries par le moyen du théorême de Taylor ; mais j'ai voulu parvenir ici au même but, à l'aide d'une méthode absolument élémentaire, afin de suppléer à ce qui manque dans tous les traités de trigonométrie.

Pour appliquer réellement le calcul numérique à ces formules, il est nécessaire d'y écrire $\frac{\varphi}{r}$ au lieu de φ, r étant le rayon de la terre. De plus, pour avoir $L' - L$, $V' - V$ et P en secondes de degrés décimaux, on doit multiplier tous les termes en φ, par $\frac{2000000''}{\pi}$, π représentant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$.

Il faut pourtant prévenir que, dans la pratique de la géodésie, l'on rejette des formules précédentes tous les termes qui sont multipliés par la troisième puissance du côté φ, vu sa petitesse ; mais qu'il est nécessaire, pour plus d'exactitude, d'introduire dans la formule par laquelle on calcule la latitude, les

termes dépendans de l'excentricité de la terre, dont la surface, abstraction faite de ses inégalités, est sensiblement celle d'un sphéroïde de révolution aplati aux pôles, et de remplacer r par le rayon de courbure de l'arc φ ; cela nous engageroit dans des détails et des théories qu'il n'appartient pas de donner ici.

Formule générale pour déterminer l'aire d'un polygone rectiligne quelconque.

Dans la plupart des nouveaux traités de géométrie analytique, on donne l'expression de l'aire d'un triangle rectiligne, en fonction des coordonnées des sommets de ses angles : rien n'est plus facile que d'en obtenir une semblable pour un polygone d'un nombre n de côtés ; la voici :

Soient $\quad x_1 y_1 ;\ x_2 y_2 ;\ x_3 y_3 ; \ldots\ldots x_n\ y_n$

les coordonnées rectangulaires des sommets des angles d'un polygone rectiligne quelconque, et S l'aire de sa surface; on aura

$$S = \tfrac{1}{2}\left[(y_2-y_n)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_4-y_2)x_3+(y_5-y_3)x_4\ldots\right.$$
$$\left.+(y_1-y_{n-1})x_n\right]$$

formule dont la loi des termes est manifeste.

Note sur les propriétés de la Projection stéréographique.

Par M. Hachette.

Le centre et le rayon d'une sphère étant donnés, on obtient la projection stéréographique d'une ligne quelconque, tracée sur la surface de la sphère, en considérant un point déterminé de cette surface, comme le sommet d'un cône qui a pour base la ligne qu'il s'agit de projeter; la projection de cette ligne résulte de l'intersection du cône, et d'un plan mené par le centre de la sphère, perpendiculairement au rayon qui correspond au sommet de ce cône.

On a vu (page 76 du 1er. volume de la Correspondance que la projection stéréographique jouit de ces deux propriétés

1°. Que tous les cercles de la sphère se projettent suivant d'autres cercles,

2°. Que deux sections quelconques se coupent toujours sous le même angle que leurs projections; d'où il résulte que toute figure peu étendue en tous sens sur la sphère, est représentée par une figure semblable sur le plan de projection.

En démontrant synthétiquement ces deux propositions (page 363 du 1er. vol. de la Correspondance), je me suis servi des expressions usitées, *section sous-contraire section anti-parallèle*, pour distinguer les sections parallèles aux deux systêmes de plans qui coupent un cône oblique suivant des cercles; on s'exprimeroit plus correctement, en nommant la section circulaire d'un cône oblique, et la section *sous-contraire*, les sections du cône oblique par une même sphère, ou par toute autre surface du second degré.

Le cône oblique étant ce que devient un *hyperboloïde elliptique*, dont la section principale elliptique se réduit à un point, et ayant démontré dans notre traité des surfaces du 2e. degré, que cette dernière surface peut être engendrée par un cercle de deux manières différentes, cette double génération par le cercle s'applique également au cône oblique. On arrive à la même conclusion par la considération suivante : deux surfaces du 2e. degré qui se pénètrent, se coupent suivant une ligne dont les projections sont en général des courbes du 4e. degré; mais dans quelques cas particuliers, les équations de ces deux surfaces sont équivalentes à deux équations du second degré entre trois variables, dont l'une se décompose en deux facteurs du premier degré. Lorsque cette décomposition a lieu, les facteurs du 1er degré sont les équations des plans qui contiennent les deux courbes du second degré, qu'on obtient par l'intersection des deux surfaces. L'une de ces courbes étant plane, l'autre l'est nécessairement. D'où il suit qu'un cône qui a pour base un cercle d'une sphère, coupe cette même sphère suivant un autre cercle, quel que soit le sommet du cône. Il suit de cette dernière proposition, qu'on doit considérer les deux sections circulaires d'un cône oblique, situées dans des plans non parallèles, comme la ligne d'intersection du cône et de la sphère qui passent par ces deux sections.

En démontrant (page citée, 363) la seconde propriété de la projection stéréographique, j'ai supposé qu'on s'aideroit d'une figure que je n'ai pas tracée; il m'a paru que la démonstration deviendroit plus claire, en y ajoutant la figure que je vais expliquer.

Ayant mené par le point commun à deux sections de la sphère, une tangente à chacune d'elles, et projetant l'angle des deux tangentes par des droites concourantes au point A d'une sphère

(fig. 4), il s'agit de faire voir que la projection de cet angle sur un plan de grand cercle de la sphère, perpendiculaire au rayon *AC*, ne diffère pas de l'angle projeté. Soit *AE* la droite d'intersection des plans menés par le point *A* et par chacune des tangentes. L'angle des tangentes est dans un plan *LM*, tangent à la sphère, et perpendiculaire au rayon *CE*; et la projection de cet angle est dans le plan *HG*, perpendiculaire au rayon *AC*. Or le plan *HG*, ou un parallèle *hEg*, et le plan *LM* font avec la droite *AE* des angles égaux, et ils sont perpendiculaires à un même plan *ACE* passant par cette droite; d'où il suit qu'ils coupent les plans menés par le point *A* et par les deux tangentes, suivant des angles égaux.

En effet, considérant l'intersection *AE* (fig. 5) de ces plans sur un plan vertical *AME*, soit *BAC* l'angle de ces mêmes plans sur le plan horizontal *AMBC*; si on les suppose coupés par deux autres plans *EM*, *Eh*, qui font avec la droite *AE* des angles égaux *AEM*, *AEh*, et qui sont perpendiculaires à un plan passant par cette droite, on peut démontrer que les sections angulaires seront égales. L'angle contenu dans le plan *EMBC*, a pour projection horizontale *BAC*, et pour projection verticale *EM*; il est opposé au côté *BC* du triangle qui a aussi pour projections *BAC* et *EM*. Si par le point *A'* distant du point *E* de $EA' = EA$, on mène un plan horizontal *A'g*, ce plan coupera le plan *Ehg* suivant une horizontale *g*, et la portion de cette horizontale comprise entre les côtés de l'angle contenu dans le plan *hEg* est évidemment égale à *BC*; donc le second angle qui a la même projection horizontale *ABC* que le premier, est opposé au côté *BC* d'un triangle qui se projette verticalement en $Eg = EM$. Ce second triangle est évidemment égal à celui qui se projette en *BAC* et *EM*, donc les angles de ces deux triangles, opposés à l'horizontale qui se projette en *BC* et en *M* pour l'un, en *BC* et en *g* pour l'autre, sont égaux. Donc *fig.* (4), l'angle des deux tangentes contenues dans le plan *EM*, et l'angle de sa projection stéréographique sur le plan *HG* ou son parallèle *hg*, sont égaux.

C. D. F. D.

Solution analytique du problême(*) énoncé pag. 57 du 2e cahier du 2e. volume de la Correspondance.

Par M. Hachette.

Soient ET (fig. 6) la longitude donnée, TM la projection de l'axe de la terre sur l'écliptique, PTM l'angle de cet axe avec le plan de l'écliptique, construit dans le plan vertical du triangle PTM qui coupe le plan vertical TN du cercle de séparation du jour et de la nuit suivant une verticale TQ; ayant projeté l'axe de la terre sur le plan vertical TN, cet axe, sa projection et la verticale TQ forment un triangle sphérique, dans lequel on connoît l'angle NTM et les deux côtés adjacens à cet angle, formés par la verticale QT, l'axe TP, et la projection de cet axe TP sur le plan vertical TN.

Nommant I l'angle de l'axe de la terre avec le plan de l'écliptique, L la longitude ET du soleil, et prenant le rayon ST de l'écliptique pour le rayon des tables, l'angle $QTP = E = 90° - I$; l'angle $NTM = L$.

Ayant abaissé du point M la perpendiculaire MN sur TN, et ramenant le point N en N' par un arc de cercle, si par le point N' on élève la perpendiculaire $N'P'$ égale à MP, QTP' sera l'angle que la verticale TQ fait avec la projection de l'axe de la terre sur le plan TN; on a démontré, pag. 57 du 2e cahier de ce volume, que les angles QTP', QTP, sont les faces adjacentes à un angle MTN d'une pyramide, dont la troisième face est le complément de la latitude du parallèle demandé; cette troisième face se calcule par la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

a, b, c, étant les trois faces de la pyramide, et A l'angle opposé à la face a.

(*) *Problême.* Etant donnée la position de l'axe de la terre pour un jour de l'année, trouver le parallèle à l'équateur qui, pour cette époque, est la limite des parallèles qui sont tout entiers dans l'hémisphère éclairé par le soleil, ou tout entiers dans l'ombre de cet astre.

Calcul pour trouver la latitude du parallèle à l'équateur demandé.

$$TM = \sin L \ldots (ST = 1)$$

à cause des triangles semblables TMS, TMN, on a

$$TS : SM :: TM : TN = \sin L \cos L. = TN'.$$

Le triangle MTP donne

$$\cos I : \sin L :: \sin I : PM = \frac{\sin I \sin L}{\cos I}. = P'N'.$$

Dans le triangle $P'TN'$, on a

$$P'N' : N'T :: 1 : \text{tang } TP'N' = \text{tang } QTP'$$

$$\text{donc, tang } QTP' = \frac{\sin L \cos L}{\left(\dfrac{\sin I \sin L}{\cos I}\right)} = \frac{\cos I \cos L}{\sin I};$$

$$\cos QTP' = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\cos^2 I \cos^2 L}{\sin I^2}}} = \frac{\sin I}{\sqrt{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}}$$

$$\sin QTP' = \frac{\dfrac{\cos I \cos L}{\sin I}}{\sqrt{1 + \dfrac{\cos^2 I \cos^2 L}{\sin^2 I}}} = \frac{\cos I \cos L}{\sqrt{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}}$$

d'ailleurs on a : $\cos b = \sin I$; $\sin b = \cos I$; $A = L$;

donc :

$$\cos a = \frac{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}{\sqrt{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}} = \sqrt{1 - \cos^2 I \sin^2 L}$$

Soit X la latitude cherchée,

$$\sin X = \sqrt{1 - \cos^2 I \sin^2 L} = \sqrt{1 - \sin^2 E \sin^2 L},$$

E étant l'angle des plans de l'équateur et de l'écliptique.

Note sur la transformation des coordonnées obliques, en d'autres coordonnées obliques, qui ont même origine.

Par M. Hachette.

Si l'on conçoit un parallélipipède qui a pour diagonale la droite menée de l'origine à un point mené dans l'espace, et pour arètes, des droites parallèles aux axes des coordonnées, les trois arètes de ce parallélipipède qui aboutissent au point donné, sont les coordonnées de ce point; la diagonale est le 4^e côté d'un quadrilatère gauche dont les trois autres côtés sont des droites égales aux coordonnées. Dans un très-beau mémoire de M. Carnot (imprimé en 1806), sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, ce géomètre a donné (page 61) les équations par lesquelles on passe d'un systême de coordonnées obliques, à un autre systême de coordonnées obliques, et il arrive à ces équations par une méthode extrêmement élégante, fondée sur ce théorême connu de géométrie, que dans tout polygone, plan ou gauche, chacun des côtés est égal à la somme de tous les autres, multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier. » D'après ces équations, qui sont toutes linéaires, on obtient facilement par l'élimination, les valeurs des coordonnées anciennes, en coordonnées nouvelles; j'ai déjà fait voir (page 7, 2^e vol.) que les équations qui donnent directement ces valeurs, exprimoient des propriétés de l'espace que j'ai démontrées par la synthèse; c'est cette même théorie que je vais exposer d'une manière qui me paroît plus simple.

Nommons x, y, z, les coordonnées obliques d'un point de l'espace; x', y', z', les nouvelles coordonnées obliques, qui ont même origine que les premières, et supposons que chaque axe des nouvelles coordonnées soit donné par les trois angles qu'il forme avec les plans des coordonnées primitives, en remarquant que de ces trois angles, deux seulement sont nécessaires. Ayant imaginé par l'origine des coordonnées, trois axes auxiliaires perpendiculaires aux plans primitifs des xy, des xz, des yz, désignons-les par les trois lettres Z, Y, X. Il est évident que les angles des axes auxiliaires et des axes des nouvelles coordonnées x', y', z' sont connus, puisqu'ils sont les complémens de ceux que ces derniers axes font avec les plans des coordonnées primitives; nous les désignerons comme M. Carnot, par les deux lettres (mises en parenthèse) qui distinguent les côtés de l'angle.

Maintenant la question est de trouver directement la valeur des coordonnées x, y, z, en fonctions des coordonnées x', y', z' et des neuf angles que les axes de ces nouvelles coordonnées font avec les droites X, Y, Z. Avant de résoudre cette question, il faut définir un nouveau mode de projection, dont nous ferons usage, et qui consiste à projeter un système de points donnés, sur une droite fixe, par des plans perpendiculaires à cette droite; le plan mené par un des points donnés perpendiculairement à la droite fixe, coupe cette droite en un point qui en est la projection. Cette espèce de projection jouit de deux propriétés: 1°. tout ce qui est contenu dans un plan perpendiculaire à la droite *de projection* se projette sur cette droite suivant un seul point; 2°. la longueur de la projection d'une droite est égale à la longueur de cette droite multipliée par le cosinus de l'angle, qu'elle fait avec la ligne de *projection*.

Cela posé, la droite menée par l'origine des coordonnées à un point déterminé de l'espace, et les droites égales et parallèles aux coordonnées x, y, z, x', y', z', forment deux quadrilatères gauches, qui ont la première droite pour côté commun; il est évident que les projections de ces deux quadrilatères sur l'une quelconque des trois droites X, Y, Z, sont égales. Or, la projection des coordonnées x, y, z, se réduit toujours à la projection de l'une d'elles; ainsi, lorsqu'on les projette sur la droite X, elle se réduit à la projection de x, car y et z, situées dans un plan perpendiculaire à la droite X, se projettent en un seul point, qui est aussi la projection de l'extrémité de x; mais la projection de x sur la droite X a pour expression $x \cos(x, X)$; donc cette quantité exprime aussi la projection de l'un des quadrilatères gauches. Les projections de x', y', z', sur la même droite X ont pour expressions respectivement

$$x' \cos(x', X),\ y' \cos(y', X),\ z' \cos(z', X).$$

Or, la somme de ces trois quantités est égale à la projection du second quadrilatère gauche, qui est elle-même égale à celle du premier quadrilatère; donc on a l'équation :

$$(E)\left\{\begin{array}{l} x\cos(x,X) = x'\cos(x',X) + y'\cos(y',X) + z'\cos(z',X). \\ \text{Par la même raison, on a les deux autres équations :} \\ y\cos(y,Y) = x'\cos(x',Y) + y'\cos(y',Y) + z'\cos(z',Y) \\ z\cos(z,Z) = x'\cos(x',Z) + y'\cos(y',Z) + z'\cos(z',Z). \end{array}\right.$$

Lorsque les axes des x, des y, des z, sont perpendiculaires entr'eux, les droites X, Y, Z, sont perpendiculaires entr'elles, et se confondent avec les axes mêmes, et on a les équations de condition :

$$\cos(x, X) = 1, \cos(y, Y) = 1, \cos(z, Z) = 1.$$
$$\cos^2(x', X) + \cos^2(x', Y) + \cos^2(x', Z) = 1.$$
$$\cos^2(y', X) + \cos^2(y', Y) + \cos^2(y', Z) = 1.$$
$$\cos^2(z', X) + \cos^2(z', Y) + \cos^2(z', Z) = 1.$$

Et les trois équations précédentes (E) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos(x', X) + y' \cos(y', X) + z' \cos(z', X) \\ y = x' \cos(x', Y) + y' \cos(y', Y) + z' \cos(z', Y) \\ z = x' \cos(x', Z) + y' \cos(y', Z) + z' \cos(z', Z), \end{array}\right\} (E')$$

dans lesquelles X, Y, Z, désignent les axes rectangulaires primitifs des x, des y, des z.

Ces formules sont celles par lesquelles on passe d'un systême de coordonnées rectangulaires à un systême de coordonnées obliques.

Lorsque les axes des x', des y', des z', sont perpendiculaires entr'eux, on a de plus les équations de condition :

$$\cos^2(x', X) + \cos^2(y', X) + \cos^2(z', X) = 1.$$
$$\cos^2(x', Y) + \cos^2(y', Y) + \cos^2(z', Y) = 1.$$
$$\cos^2(x', Z) + \cos^2(y', Z) + \cos^2(z', Z) = 1.$$

Dans le cas général, nous avons supposé les nouveaux axes des x', des y', des z', déterminés par les angles que ces axes font avec les plans (xy), (xz), (yz) des coordonnées primitives x, y, z; s'ils étoient déterminés par les angles qu'ils feroient avec les arêtes de la pyramide formée par ces trois plans, les formules ordinaires de la trigonométrie sphérique donneroient les lignes trigonométriques des neuf angles qu'on a supposés connus dans les équations (E) ou (E'), et on déduiroit des mêmes formules trois équations de condition, entre ces angles et les trois autres angles qui déterminent la position respective des trois axes des x, des y, des z, et qui appartiennent à la pyramide formée par ces trois axes.

Supplément à l'article « des Surfaces du second degré », pages 187 — 203 ; par M. Bourdon.

Dans la discussion des cas particuliers relatifs à la détermination des axes principaux dans les surfaces du second degré, nous n'avons fait aucun usage de l'équation en u, parce qu'elle est très-compliquée. Cependant, pour ne rien laisser à désirer sur cette matière, nous avons cru devoir faire connoître une forme sous laquelle elle est susceptible d'être mise, et qui en rend la discussion assez simple.

Faisons, pour abréger,

$$\begin{aligned} P &= 2\,B'B''(A-A') + B\,(B''^2 - B'^2) \\ Q &= 2\,B\,B''(A''-A) + B'\,(B^2 - B''^2) \\ R &= 2\,B\,B'(A'-A'') + B''\,(B'^2 - B^2). \end{aligned}$$

Les quantités P, Q, R, sont évidemment liées entr'elles par la relation :

$$P.B + Q B' + R B'' = 0 \qquad (X).$$

On parvient, après quelques transformations, à l'équation

$$RBu^3 + [2R(A-A') + QB - PB']\,u^2 + [PB'' + 2Q(A-A') - RB]\,u - ($$

Cela posé, soit 1° $R=0$, l'une des valeurs d'u devient infinie. Quant aux deux autres, elles seront données par l'équation

$$(QB - PB')\,u^2 + [BP'' + 2\,Q\,(A-A')]\,u - QB = 0,$$ qui

devient, $\left(\text{à cause de la relation } (X), \text{ d'où l'on tire } P = -\dfrac{B'}{B}Q\right)$,

$$u^2 + \frac{2B(A-A') - B'B''}{B^2 + B'^2}\,u - \frac{B^2}{B^2 + B'^2} = 0,$$

équation qui donnera les deux autres valeurs d'u.

On parviendroit à cette même équation, en remontant à

l'équation (11), qui, dans le cas de $R=0$, peut être mise sous la forme

$$(B'u - Bt)(BB''u + B'B''t + BB') = 0.$$

Le 1^er facteur donne $t = \frac{B'}{B} u$;

d'où, en substituant dans l'équation (9),

$$u^2 + \frac{2B(A-A') - B'B''r}{B'^2 + B^2} u - \frac{B^2 + B'^2}{B^2} = 0.$$

Le 2^e facteur donne $t = -\frac{BB''u + BB'}{B'B''}$;

d'où, substituant dans l'équation (9)

$$[2B'B''(A-A') + B(B''^2 - B'^2)] u = 0,$$

équation qui a pour valeur $u=0$; d'où l'on déduit

$$t = -\frac{B}{B''}.$$

Mais ce système de valeurs est étranger; car, en le substituant dans l'équation (10), on reconnoît qu'elle n'est pas satisfaite. Ce système étranger provient de la manière dont l'équation (11) a été formée avec les équations (9) et (10).

2°. Soit $Q=0$, il en résulte

$$u=0 \ldots\ldots RBu^2 + [2R(A-A') - PB']u + PB'' - RB = 0,$$

ou, à cause de $P = -\frac{B''}{B} R \ldots\ldots$,

$$u^2 + \frac{2B(A-A') + B'B''}{B^2} u - \frac{B^2 + B''^2}{B^2} = 0,$$

équation à laquelle on parviendroit facilement (n° 4), en observant que l'équation (10) peut, dans le cas de $Q=0$, être mise sous la forme

$$(Bt - B'')(BB''u + B'B''t + BB') = 0.$$

3°. Soit $P=0$, il en résulte

$$2Bu^3+[2R(A-A')+QB]u^2+[2Q(A-A')-RB]u-QB=0,$$

ou, à cause de $Q=-\dfrac{B''}{B'}R$,

$$BB'u^3+[2B'(A-A')-BB'']u^2-[2B''(A-A')+BB']u+BB''=0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$Bu^2(B'u-B'')+2(A-A')u(B'u-B'')-B(B'u-B'')=0;$$

d'où $\quad B'u-B''=0\quad;\quad$ et $u^2+\dfrac{2(A-A')}{B}u-1=0.$

Et en effet, d'après la condition $P=0$, l'équation (9) peut (n° 3) se mettre sous la forme

$$(B'u-B'')(BB''u+B'B''t+BB')=0,$$

équation qui est satisfaite en posant $B'u-B''=0$.

4°. Enfin supposons que l'on ait à-la-fois $P=0$; $Q=0$; $R=0$, l'équation en u se réduit à $0=0$, et u reste entièrement indéterminé.

Cette indétermination tient, comme nous l'avons déjà vu, à l'existence d'un facteur commun entre les équations (9), (10) et (11).

GÉOMÉTRIE.

Sur les Polyèdres, *par* M. CAUCHY, *aspirant ingénieur des Ponts et Chaussées.*

Euler a déterminé le premier, dans les Mémoires de Pétersbourg, année 1758, la relation qui existe entre le nombre des différens élémens qui constituent un polyèdre quelconque pris à volonté. Le théorème qui exprime cette relation n'est qu'un cas particulier d'un autre théorème plus général, dont voici l'énoncé :

THÉORÊME.

Si l'on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra, en prenant à volonté dans l'intérieur de nouveaux sommets ; que l'on représente par P le nombre des nouveaux polyèdres ainsi formés, par S le nombre total des sommets, y compris ceux du premier polyèdre, par H le nombre total des faces, et par A le nombre total des arêtes, on aura

$$S+H=A+P+1,$$

c'est-à-dire, que la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpassera d'une unité la somme faite du nombre des arêtes et de celui des polyèdres.

Démonstration.

Décomposons tous les polyèdres en pyramides triangulaires, en faisant passer par les arêtes ou diagonales des faces de chaque polyèdre et les sommets situés hors de ces faces, des plans diagonaux. Toutes les faces se trouveront décomposées en triangles. Soient m le nombre des plans diagonaux, et n le nombre des diagonales formées par les intersections des plans diagonaux, soit entr'eux, soit avec les anciennes faces, le nombre des faces tant anciennes que nouvelles sera $H+m$; et le nombre des triangles dans lesquels chaque face se trouve partagée étant égal au nombre des diagonales formées sur cette face, augmenté de

l'unité, le nombre total des triangles qui forment les faces des pyramides sera égal au nombre total des diagonales augmenté du nombre total des faces,

ou à $$H + m + n.$$

Le nombre des pyramides sera égal à celui des polyèdres, plus au nombre des plans diagonaux,

ou à $$P + m.$$

Le nombre des arêtes des pyramides sera égal à celui des anciennes arêtes, plus au nombre total des diagonales,

ou à $$A + n.$$

Enfin, le nombre des sommets des pyramides sera toujours égal

à $$S.$$

Supposons maintenant que l'on enlève successivement du polyèdre total les diverses pyramides triangulaires qui le composent, de manière à n'en laisser subsister à la fin qu'une seule, en commençant par celles qui ont des triangles sur la surface extérieure du premier polyèdre, et n'enlevant dans la suite que celles dont une ou plusieurs faces auront été découvertes par des suppressions antérieures. Chaque pyramide que l'on enlevera aura une, deux, ou trois faces découvertes. Soit p' le nombre des pyramides qui ont une face découverte au moment où on les enlève, p'' le nombre des pyramides qui ont alors deux faces découvertes, et p''' le nombre de celles qui ont alors trois faces découvertes. La destruction de chaque pyramide sera suivie, dans le premier cas, de la destruction d'une face ; dans le second cas, de la destruction de deux faces et de l'arête commune à ces deux faces; dans le troisième cas, de la destruction d'un sommet, de trois faces, et de trois arêtes. Il suit de là qu'au moment où l'on aura détruit toutes les pyramides, à l'exception d'une seule,

le nombre des sommets détruits sera p''',

celui des pyramides détruites, $p' + p'' + p'''$,

celui des triangles détruits, $p' + 2p'' + 3p'''$,

celui des arêtes détruites, $p'' + 3p'''$.

Le nombre des sommets restans pourra donc être représenté par

$$S - p''' = 4,$$

celui des pyramides restantes, par

$$P + m + n - (p' + p'' + p''') \qquad = 1,$$

celui des triangles restans, par

$$H + m + n - (p' + 2p'' + 3p''') \qquad = 4,$$

celui des arêtes restantes, par

$$A + n - (p'' + 3p''') \qquad = 6.$$

Si l'on ajoute la première équation à la troisième, on aura

$$S + H + m + n - (p' + 2p'' + 4p''') = 8$$

si l'on ajoute la deuxième à la quatrième, on aura

$$A + P + m + n - (p' + 2p'' + 4p''') = 7.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations précédentes, on aura

$$S + H - A - P = 1,$$

ou

$$S + H = A + P + 1.$$

Corollaire 1.

Si l'on suppose que tous les sommets intérieurs soient détruits, il n'y aura plus qu'un seul polyèdre. Il faudra faire alors $P = 1$, et l'on aura

$$S + H = A + 2,$$

ce qui est le théorême d'Euler.

Corollaire 2.

Si l'on considère une figure plane composée de plusieurs polygones renfermés dans un contour donné, il faudra faire dans la formule générale $P = o$, et l'on aura alors

$$S + H = A + 1,$$

d'où l'on conclut que la somme faite du nombre des polygones et du nombre des sommets surpasse d'une unité le nombre des droites qui forment les côtés de ces mêmes polygones.

Nota. Dans un Mémoire sur les Polyèdres, imprimé X^e. Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, M. Poinsot a démontré

l'existence de quatre nouveaux Polyèdres réguliers, à angles saillans et rentrans; M. Cauchy a lu à l'Institut un Mémoire dans lequel il considère ces nouveaux Polyèdres comme résultans du prolongement des faces des Polyèdres réguliers à angles saillans, et il démontre que leur nombre se réduit nécessairement à quatre; proposition que M. Poinsot avoit présentée comme difficile à approfondir.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Problême. Etant donnés deux ellipsoïdes de révolution, dont les axes ne sont pas dans le même plan, déterminer leur courbe d'intersection, en n'employant que la ligne droite et le cercle.

Solution, *par* M. CHAPUY, *élève*.

Nous choisirons pour plans de projections un plan vertical parallèle aux deux axes, et un plan horizontal perpendiculaire à l'un de ces axes; fig. 1 *a*, 1 *b*, pl. 2.

Cela posé, nous remarquerons que si l'un des ellipsoïdes est coupé par un plan donné perpendiculaire au plan vertical, il sera toujours possible de trouver un autre plan aussi perpendiculaire au plan vertical, tel que la section du premier soit projetée sur le second suivant un cercle : si donc on laisse indéterminée l'inclinaison du plan coupant avec l'axe de l'ellipsoïde, ainsi que celle du plan de projection correspondant, on pourra satisfaire à une condition de plus, savoir : que le premier plan coupe encore le second ellipsoïde suivant une section qui se projette en un cercle sur le second plan.

Ces deux plans une fois obtenus, le problême n'offrira plus de difficultés; nous allons donc nous occuper de leur recherche.

Soit d'abord AB, fig. 1 *a*, pl. 2, la trace d'un plan quelconque perpendiculaire au plan vertical et passant par le centre o d'un des ellipsoïdes : la projection de l'intersection sera une ellipse dont les demi axes seront co et Ao; construisant donc le triangle rectangle AOE avec $AE = co$, la projection de Ao sur tout plan parallèle à celui représenté par la trace AE, sera $AE = oc$, et celle de la section sera un cercle.

Il ne s'agit plus maintenant que de trouver dans quel cas les deux triangles correspondans dans les deux ellipses génératrices ont leurs côtés parallèles, car les plans parallèles

donnant des sections semblables, ce que nous aurons trouvé pour les sections passant par les centres, aura également lieu pour les sections parallèles.

Cela se réduit à une simple construction de géométrie plane. Menons fig. 2 *a*, pl. 2, $C'OD'$ parallèle à CD; sur $C'D'$ construisons une ellipse dont O soit le centre, qui ait même petit axe que l'ellipse (E), et les axes proportionnels aux axes de l'ellipse E'. Soit E un point d'intersection des deux ellipses concentriques. Joignons E,O. Menons $E'O'$ parallèle à EO, et construisons les deux triangles rectangles EOG, $E'O'G'$, de la même manière que précédemment; nous aurons, en appelant B et B' les deux demi-axes,

$$\frac{EO}{E'O'} = \frac{B}{B'} = \frac{EG}{E'G'};$$

donc EOG est semblable à $E'O'G'$, et EG parallèle à $E'G'$; les directions EO, EG, sont par conséquent celles des plans coupans et projetans cherchés.

Le reste de la solution se fera maintenant avec beaucoup de facilité. MN, fig. 2 *b*, étant la trace du nouveau plan de projection, on aura $A'B'$, $C''D''$ pour projections des axes, en remarquant qu'elles doivent être à une même distance de la trace que dans la projection primitive. Maintenant, pour un plan coupant quelconque, tel que HI, on aura en projection deux cercles qui se couperont en général suivant deux points qu'on remettra en projection verticale sur HI, et que l'on aura aussi, si l'on veut, sur la première projection horizontale, en remarquant que pour cette projection, ainsi que pour la projection auxiliaire, les points correspondans sont à égales distances des traces. En continuant toujours de la même manière, on trouvera la courbe d'intersection cherchée.

On menera la tangente à cette courbe comme dans le cas où les deux axes sont dans un même plan.

M. Brianchon, officier d'artillerie, à M. Hachette.

Tolède, 8 avril 1810.

Le hasard m'ayant fait tomber entre les mains une édition latine de l'*Almageste de Ptolémée* (*), j'en ai extrait et traduit le

(*) Almagestum Cl. Ptolemei. *Venetiis*, 1515, in-fol.

passage suivant, qui est relatif à la *Théorie des Transversales*, et qui même en contient le principe fondamental. Comme l'exposition savante de cette nouvelle branche de la géométrie vient de faire époque dans l'histoire des progrès de la science, qui, par là, s'est enrichie d'un nouvel élément, j'ai pensé qu'il seroit curieux de montrer que les anciens Grecs ont connu les premiers linéamens de cette théorie, dont ils faisoient usage pour résoudre quelques problêmes astronomiques.

Almageste. — Livre Ier, chap. 12.

Premier Théorême. Fig. 3, pl. 2.

« Entre deux lignes droites AB et AG soient tirées deux autres
» droites BE et GD qui se coupent mutuellement au point Z:
» je dis que GE est à EA en raison composée du rapport de
» GZ à ZD, et du rapport de DB à BA. »

Pour le démontrer, je mène par le point A la ligne AI parallèle à EB, et je prolonge ces deux lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en I.

Puisque les droites AI, EZ, sont équidistantes, GE est à EA comme GZ est à ZI.

Mais, en multipliant par ZD les deux derniers termes de cette proportion, on peut considérer le rapport des lignes GE, EA, comme se composant du produit des rapports GZ à ZD, et DZ à ZI.

Or, DZ est à ZI comme DB est à BA, par suite de ce que les droites AI et BZ sont parallèles.

Donc enfin GE est à EA en raison composée des rapports GZ à ZD, et DB à BA. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce théorême peut se traduire par cette équation :

$$GZ \times ZD \times BA = EA \times GZ \times DB,$$

laquelle fournit cet autre énoncé :

« *Si dans le plan d'un triangle rectiligne quelconque*, ADG,
» *on mène arbitrairement une droite indéfinie*, BE, *qui ren-*
» *contre tous les côtés, prolongés s'il le faut : cette transver-*
» *sale déterminera deux segmens sur chaque côté; et, des six*
» *segmens résultans, le produit de trois d'entr'eux*, GE, ZD,
» BA, *est égal au produit des trois autres*, EA, GZ, DB, *en*

» *les prenant de manière qu'il n'en entre pas deux dans un*
» *même produit, qui ayent une extrémité commune.* » [Géométrie de position, de M. Carnot.]

LEMME. Fig. 4 *a*, 4 *b*.

« Soient *A*, *B*, *G*, trois points pris à volonté sur la circonfé-
» rence d'un cercle dont le centre est *D* : si l'on nomme *E* le
» point de rencontre de la corde *AG* et du rayon *DB*, pro-
» longés s'il est nécessaire, on aura : *AE* est à *EG* comme la
» soutendante du double de l'arc *AB* est à la soutendante du
» double de l'arc *BG*. »

[*La soutendante d'un arc étant double du sinus de la moitié de ce même arc, la proportion précédente peut s'écrire ainsi :*

« *AE* : *EG* : : sin . *AB* : sin . *BG*. »]

DEUXIÈME THÉORÊME. Fig. 5.

« Soient décrits sur la surface d'une sphère quatre arcs de
» grands cercles, *AB*, *AG*, *BE*, *GD*, dont les deux derniers se cou-
» pent mutuellement en *Z*, et sont compris entre les deux autres.
» Je dis que la soutendante d'un arc double de *GE* est à la sou-
» tendante d'un arc double de *EA*, en raison composée du
» rapport de la soutendante du double de *GZ* à la soutendante
» du double de *ZD*, et du rapport de la soutendante du double
» de *DB* à la soutendante du double de *BA*. »

En effet, nommons *I* le centre de la sphère, et de ce centre aux points de section de l'arc *BZE* menons *IB*, *IZ* et *IE*, puis tirons la droite *AD* qui concourt au point *T* avec *IB* ; de la même manière, conduisons les droites *DG* et *AG* qui coupent respectivement les lignes *IZ*, *IE*, aux points *K* et *L*.

Il suit de cette construction, que les trois points *T*, *K*, *L*, sont en ligne droite, puisqu'ils sont, d'une part, dans le plan de l'arc *BZE*, et, de l'autre, dans le plan du triangle rectiligne *AGD*.

Traçons donc la droite *TKL*, et considérons le système des quatre lignes *TA*, *GA*, *TL*, *GD*. Les deux dernières se croisent en *K*, et sont comprises entre les deux autres ; ainsi, (1^er^. théo-

rême), le rapport de la droite GL à la droite LA est composé du produit du rapport de la droite GK à la droite KD par celui de la droite DT à la droite TA.

Or (d'après le lemme), GL est à LA comme la soutendante du double de l'arc GE est à la soutendante du double de l'arc EA.

De même, GK est à KD comme la soutendante du double de l'arc GZ est à la soutendante du double de ZD.

Et, enfin, DT est à TA comme la soutendante du double de l'arc BD est à la soutendante du double de BA.

Donc, la soutendante du double de l'arc GE est à la soutendante du double de EA, en raison composée du rapport de la soutendante du double de GZ à la soutendante du double de ZD, et du rapport de la soutendante du double de DB à la soutendante du double de BA. Ce qu'il s'agissoit de démontrer.

En substituant dans cette proportion les sinus des arcs simples aux soutendantes des arcs doubles, et égalant le produit des termes extrêmes au produit des termes moyens, on a

$$\sin GE \times \sin ZD \times \sin BA = \sin EA \times \sin GZ \times \sin DB,$$

c'est-à-dire que :

« *Si sur la surface d'une sphère on trace arbitrairement*
» *quatre arcs de grands cercles* (AD, AG, GD, BE), *et*
» *que l'on considère les trois premiers comme formant un*
» *triangle sphérique* (ADG), *dont tous les côtés, prolongés,*
» *s'il le faut, sont coupés par le quatrième* (BE), *cet arc*
» *transversal déterminera deux segmens sur chaque côté; et,*
» *des six segmens résultans, le produit des sinus de trois*
» *d'entr'eux* (GE, ZD, BA) *est égal au produit des sinus*
» *des trois autres* (EA, GZ, DB), *en les prenant de ma-*
» *nière que dans un même produit il n'entre pas deux sinus*
» *qui appartiennent à des arcs qui aient une extrémité com-*
» *mune.* » Géom. de position.

Du Parallélipipède, par M. HACHETTE. Fig. 1, pl. 3.

Soit (fig. 1) $A\ B\ C\ D\ A'\ B'\ C'\ D'$ un parallélipipède oblique, terminé par six parallélogrammes obliques. Après avoir mené les diagonales de chaque parallélogramme, on a douze

diagonales qui sont les arêtes de deux pyramides triangulaires *symétriques*, que M. Monge a nommées (page 441 du 1er. vol. de la Correspondance) ***Pyramides conjuguées***. Il y a une telle relation entre le parallélipipède et chacune de ces pyramides, que l'un de ces solides étant donné, l'autre est déterminé. En effet des six arêtes d'une pyramide triangulaire, une quelconque est coupée par quatre autres qui lui sont *adjacentes*, et n'a aucun point de commun avec la sixième arête ; nommant, comme M. Monge, arêtes *opposées* d'une pyramide triangulaire, celles qui ne se coupent pas, et menant par deux arêtes opposées des plans parallèles, les trois couples d'arêtes opposées détermineront six plans qui comprendront entr'eux le parallélipipède circonscrit à l'une ou l'autre des pyramides conjuguées. Les six diagonales qui sont les arêtes d'une même pyramide conjuguée, concourent trois à trois au sommet d'un des angles solides du parallélipipède circonscrit. D'après cette définition, $AB'CD'$ et $A'BC'D$ sont les deux pyramides conjuguées, inscrites au parallélipipède $ABCDA'B'C'D'$. Les sommets *opposés* de ces pyramides sont situés sur une même diagonale du parallélipipède, et sont marqués de la même lettre accentuée pour l'un, et sans accent pour l'autre; A et A', B et B', etc., sont des sommets opposés. Les bases des deux pyramides qui correspondent aux sommets opposés, tels que A et A', sont deux triangles $B'CD'$, $BC'D$, situés dans des plans parallèles entr'eux ; chacun de ces plans coupe les arêtes de la pyramide dont il ne contient pas la base en parties égales : ainsi le plan de la base $B'CD'$ de la pyramide $AB'CD'$, divise les arêtes de la pyramide $A'BC'D$ en parties égales aux points G, H, L; de même le plan de la base $BC'D$ de la pyramide $A'BC'D$ divise les arêtes de la pyramide $AB'CD'$ en parties égales aux points G', H', L'.

D'où il suit que les petites pyramides qui ont pour bases les triangles GHL et $G'H'L'$, et pour sommets les points A' et A, sont semblables aux pyramides entières $A'BC'D$, $AB'CD'$; et le rapport de leurs volumes est évidemment celui de 1 à $(2)^3$, ou de 1 à 8.

Pour déterminer le rapport des volumes des parallélipipèdes et des pyramides conjuguées, on remarquera que les bases $B'CD'$, et $BC'D$ de ces pyramides sont chacune divisées en quatre triangles égaux, qui sont pour l'une GHL, GLB', GHC, HLD'; et pour l'autre $G'H'L'$, $G'L'B$, $G'H'C'$, $H'L'D$; d'ou il suit que la pyramide $A'GHL$ est le quart de la pyramide $A'B'CD'$ ou $CA'B'D'$; or, cette dernière pyramide est le sixième du parallélipipède comme ayant une hauteur

égale et une base moitié; donc la pyramide $A'GHL$ est la 24^e. partie du parallélipipède; mais elle n'est que la 8^e. partie de la pyramide conjuguée: donc le volume de la pyramide conjuguée est les $\frac{8}{24}$ ou le tiers du parallélipipède.

L'une des pyramides conjuguées étant coupée par les quatre plans qui comprennent l'autre pyramide suivant quatre triangles, il s'ensuit que ces deux pyramides se pénètrent et se coupent suivant huit triangles, et que leur noyau commun est un octaèdre qui a pour faces ces triangles; en sorte que le système des deux pyramides conjuguées est composé de ce noyau et de huit petites pyramides qui ont pour bases les faces de l'octaèdre: or, on a vu que chacune de ces pyramides est la 24^e. partie du parallélipipède, et que chaque pyramide conjuguée est le tiers du parallélipipède; donc le noyau est le 6^e. de ce parallélipipède. Les huit petites pyramides qui ont pour bases les faces de ce noyau valent les $\frac{2}{6}$ du parallélipipède; donc la partie de ce solide qui n'est pas remplie par le noyau et par les huit petites pyramides, est la moitié du parallélipipède. Cette partie est composée de douze pyramides équivalentes entr'elles, et de même volume que l'une quelconque des petites pyramides, qui ont pour bases les faces du noyau octaèdre. Chacune de ces douze pyramides a pour arêtes un côté d'une face du parallélipipède, et les deux demi-diagonales de cette face.

Ces pyramides correspondent aux arêtes du parallélipipède, dans l'ordre suivant:

Arêtes du parallélipipède.	*Pyramides correspondantes aux arêtes du parallélipipède.*
$A'B'$, $A'C$, $A'D'$	$A'B'GH$, $A'CGH$, $A'D'HL$;
AB, AC', AD,	$ABG'L'$, $AC'G'H'$, $ADH'L'$;
$C'A$, $C'B'$, $C'D'$,	$C'AG'H'$, $C'B'LH'$, $C'D'G'L$;
CA', CB, CD,	$CA'GH$, $CBHL'$, $CDGL'$.

Sur la pyramide triangulaire;

Par M. MONGE. Fig. 2, pl. 3; Fig. 1, pl. 4.

Dans tout triangle rectiligne,

Le centre du cercle circonscrit,

Le centre de gravité,

Et le point d'intersection des perpendiculaires abaissées du sommet de chacun des angles sur le côté opposé,

Sont toujours en ligne droite; et la distance des deux derniers de ces points est double de celle des deux premiers.

La proposition analogue a lieu pour la pyramide triangulaire; mais son énoncé n'est pas aussi simple.

Dans toute pyramide triangulaire, si par le milieu de chacune des six arêtes on mène

1°. Un plan qui soit perpendiculaire à cette arête, on aura six plans qui passeront par le centre de la sphère circonscrite;

2°. Un plan qui passe par l'arête *opposée* (pag. 261), on aura six plans qui passeront par le centre de gravité;

3°. Un plan perpendiculaire à l'arête opposée, on aura six autres plans qui passeront par un certain même point; ce qu'il faudra démontrer.

Cela posé, les trois points, déterminés ainsi qu'on vient de le dire, sont toujours en ligne droite; et le second est à égales distances des deux autres.

Démontrons d'abord que les plans menés par le milieu des arêtes perpendiculairement aux arêtes opposées, passent tous six par un même point.

Soit projetée la pyramide sur le plan de sa base ABC, fig. 2, pl. 3, considéré comme horizontal; soit D la projection du sommet; les droites AD, BD, CD seront les projections des trois arêtes contiguës au sommet. Si l'on divise ces droites en parties égales aux points respectifs a, b, c, et si l'on joint leurs milieux par des droites, on aura le triangle abc, dont tous les côtés seront respectivement parallèles aux côtés de la base ABC. Cela posé, si par chacun des milieux a, b, c, des arêtes DA, DB, DC, on mène un plan perpendiculaire à l'arête opposée, qui est un des côtés de la base, ce plan sera vertical, et sa projection sera une droite perpendiculaire à ce côté; donc les projections de ces trois plans seront les perpendiculaires abaissées des points

a, b, c, sur les côtés de la base, ou sur les côtés du triangle $a\,b\,c$: or, ces perpendiculaires se couperont toutes trois en un certain point M; donc les trois plans menés par les milieux des arêtes contiguës au sommet, perpendiculairement aux arêtes opposées, passent par la verticale élevée par le point M.

Actuellement concevons que la pyramide tourne autour d'un des côtés de sa base, par exemple autour de AC, jusqu'à ce que la face adjacente $A\,C\,D$ s'applique à son tour sur le plan horizontal en ACD, et devienne une nouvelle base; dans ce mouvement, chaque point de la pyramide décrira un arc de cercle, dont le plan sera vertical et perpendiculaire à AC; donc, si l'on fait la projection de la pyramide considérée dans cette seconde position, le point D' de la nouvelle base sera dans la perpendiculaire abaissée du point D sur $A\,C$; et la projection B' du nouveau sommet sera dans la perpendiculaire abaissée du point B. Soient menées les projections $A\,B'$, $C\,B'$ et $D'\,B'$ des arêtes contiguës au nouveau sommet, et soient partagées les projections chacune en deux parties égales aux points respectifs e, f, b', il est clair que $B\,D$ et $B'\,D'$ seront les projections de la même arête, et que leurs milieux b et b' seront les projections d'un même point; ainsi la droite $b\,b'$ sera perpendiculaire à la charnière $A\,C$.

Après avoir joint les trois points e, f, b' pour former le triangle $e\,f\,b'$ qui sera semblable à la seconde base $A\,C\,D'$, et en raisonnant pour cette seconde projection comme nous avons fait pour la première, il est clair que les trois plans menés par les points e, f, b' perpendiculairement aux arêtes opposées respectives, c'est-à-dire aux trois côtés de la seconde base, seront verticaux, et qu'on aura leurs projections en abaissant de chacun des sommets du triangle $e\,f\,b'$ une perpendiculaire sur le côté opposé. Or, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point N; donc les trois plans verticaux passent tous par la verticale élevée au point N; de plus, la droite $b\,b'$ étant perpendiculaire sur $A\,C$, le point N, ainsi que le point M se trouve sur cette droite; donc les verticales élevées par les points M et N sont dans un même plan perpendiculaire à la charnière. Si donc on conçoit que la pyramide retourne à sa position primitive en tournant encore autour de la droite AC comme charnière, et en entraînant les trois plans que nous venons de mener, et la droite de leur intersection commune, cette dernière droite ne sortira pas du plan vertical perpendiculaire à la charnière; elle ne cessera donc pas de couper la verticale fixe élevée au point M, et elle la coupera encore, lorsque la pyramide sera revenue à sa position primitive. Le point d'intersection de ces deux droites sera donc commun aux plans menés par les milieux

des cinq arêtes AD, BD, CD, AB, BC, perpendiculairement aux arêtes opposées respectives.

Jusques ici nous n'avons considéré que cinq plans différens, parce que celui qui passe par le milieu de BD a été employé dans les deux positions différentes de la pyramide, tandis que celui qui passe par le milieu de la charnière AC n'a été employé ni dans l'une ni dans l'autre. Mais si l'on fait encore tourner la pyramide autour d'un autre côté de sa base, c'est-à-dire autour de AB ou de BC, de manière que les faces correspondantes ABD ou ACD deviennent une nouvelle base, et que l'arête AC devienne contiguë au nouveau sommet, on trouvera de même que les plans menés par les milieux des trois arêtes contiguës au nouveau sommet perpendiculairement aux opposées respectives, se coupent encore dans une droite perpendiculaire à la nouvelle base; et que lorsque la pyramide est revenue dans sa position primitive, cette droite d'intersection coupe de même la verticale élevée au point M dans un point qui est par conséquent commun à cinq de nos six plans, parmi lesquels se trouve celui qui passe par le milieu de la charnière AC; donc le point est commun aux six plans : *ce qu'il falloit démontrer.*

Maintenant il faut démontrer que le centre de gravité de la pyramide est au milieu de la droite qui joint le point que nous venons de construire, et le centre de la sphère circonscrite.

Soient, fig. 1, pl. 4, ABC la base, et D le sommet d'une pyramide triangulaire quelconque vue en perspective : par les milieux a, b, c, des trois arêtes contigües au sommet, concevons un plan; ce plan sera parallèle à la base, et coupera la pyramide dans un triangle abc, semblable à la base ABC, et orienté comme elle; mais chacun des côtés du triangle abc ne sera que la moitié du côté correspondant de la base.

Cela posé, par chacun des côtés de la base et par le milieu de l'arête opposée menons un plan : ce plan qui passera par le centre de gravité de la pyramide, coupera le plan du triangle abc en une droite parallèle au côté de la base par lequel il passe. Ces trois plans formeront une autre pyramide, qui aura même base que la pyramide principale, et dont le sommet sera au centre de gravité. Les faces de cette nouvelle pyramide, prolongées jusqu'au plan du triangle abc, couperont ce plan dans les côtés d'un triangle $A'B'C'$. Chacun de ces côtés passera par le sommet d'un des angles du triangle abc, et sera parallèle à un des côtés de ce triangle. Donc le triangle $A'B'C'$ sera semblable à abc, mais renversé par rapport à lui; chacun des côtés de $A'B'C'$ sera double du côté correspondant abc, et le sommet du triangle abc par lequel il passe, le partagera en deux parties

égales. Donc le triangle $A'B'C'$ sera égal et semblable à la base ABC, et renversé par rapport à elle ; donc ces deux triangles sont des sections faites dans une même pyramide par des plans parallèles entr'eux et placés à égales distances de part et d'autre du sommet. Donc, enfin, les deux pyramides qui ont leur sommet commun au centre de gravité, et qui ont pour bases, l'une le triangle ABC, l'autre le triangle $A'B'C'$, sont opposées au sommet, semblables et parfaitement égales entre elles.

Actuellement, si par chacun des points a, b, c, on mène un plan perpendiculaire à l'arête dont ce point est le milieu, on aura trois plans qui se couperont dans le centre de la sphère circonscrite, et qui formeront une pyramide qui sera placée d'une manière déterminée par rapport à la pyramide qui a son sommet au centre de gravité et dont la base est $A'B'C'$. De même, si par les milieux a', b', c' des trois côtés de la base ABC, on mène des plans perpendiculaires aux arêtes opposées, ces trois plans seront placés par rapport à la pyramide dont le sommet est au centre et dont la base est ABC, de la même manière que les trois plans qui donnent le centre de la sphère circonscrite, le sont par rapport à la pyramide opposée au sommet. Ces plans formeront donc une pyramide dont le sommet sera placé dans la pyramide inférieure au centre de gravité, comme le centre de la sphère circonscrite est placé dans celle qui est supérieure au centre de gravité. Donc les sommets de ces deux pyramides sont semblablement placés dans les pyramides opposées, et par conséquent sont sur une droite qui passe par le centre de gravité. Enfin, comme les pyramides opposées sont égales entr'elles, il s'ensuit que les deux sommets sont à égales distances du centre de gravité. Mais le dernier sommet n'est autre chose que le troisième point dont il s'agit dans l'énoncé. Donc...., etc.

Tout ce qui précède peut être singulièrement réduit. Car si on mène les droites $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ qui se rencontrent en un point D', on formera la pyramide conjuguée (voyez page 441, 1[er]. vol. de la Correspondance) $A'B'C'D'$, qui aura même centre de gravité que $ABCD$, et le troisième point que nous avons déterminé ne sera autre chose que le centre de la sphère circonscrite à la pyramide conjuguée. La proposition dont il s'agit se réduit donc à ceci. *Etant donnée une pyramide triangulaire quelconque, si l'on considère en même temps la pyramide conjuguée qui aura nécessairement le même centre de gravité, les sphères circonscrites aux deux pyramides auront des rayons égaux, et leurs centres seront en ligne droite avec le centre de gravité, et à égales distances de part et d'autre.*

Propriétés des centres de gravité.

Par M. BLONDAT, *élève*.

Soit abc, fig. 2, pl. 4, un triangle situé d'une manière quelconque, par rapport à un plan $a'b'c'd'$ ... ou (x, y).

On sait que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de son aire est donnée par l'équation

$$p = \frac{aa' + bb' + cc'}{3}.$$

On sait aussi que le volume du prisme triangulaire $abca'b'c'$ est donné par l'équation

$$V = \left(\frac{aa' + bb' + cc'}{3}\right) a'b'c';$$

donc $$V = a'b'c' . p,$$

en sorte que le volume du prisme $abca'b'c'$ est équivalent au produit de sa base par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de sa face supérieure.

Conclusions.

1°. Ce théorême est général et a lieu, quel que soit le polygone supérieur, pourvu qu'il soit plan.

En effet, la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité étant P, et p, p', p''.... étant celles correspondantes aux triangles abc, acd,....

On a l'équation :

$$P(abc + acd + \ldots.) = p . abc + p' acd + \ldots\ldots$$

la multipliant par $\cos a$, [a étant l'angle du plan du polygone supérieur avec le plan (x, y)], elle devient

$$P(abc.\cos a + acd.\cos a + \ldots) = p.\, abc.\cos a + p'.acd.\cos a + \ldots$$

ou en remplaçant $abc . \cos a$ par la projection $a'b'c'$, etc. il en résulte

$$P(a'b'c' + a'c'd' + \ldots.) = p . a'b'c' + p'a'.c'd' + \ldots.$$

Or, $p \cdot a' b' c'$ est, d'après la remarque précédente, le volume du prisme $abc\, a' b' c'$, ainsi des autres; donc le volume du prisme total $= P\,(a' b' c' d' e' \ldots) =$ la base du prisme par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du polygone supérieur.

2°. Ce théorême ayant lieu, quel que soit le nombre des côtés du polygone, a encore lieu lorsque ce polygone dégénère en courbe.

3°. Ces remarques ne fournissent, à la vérité, une expression du volume des cylindres, qu'autant que leur base est perpendiculaire à leurs arêtes; mais on peut aussi en déduire une expression fort simple, lorsque cette base est inclinée d'une manière quelconque.

Je démontrerai d'abord que si l'on fait une suite de sections dans un cylindre, ces sections faisant entre elles des angles quelconques, leurs centres de gravité se trouvent sur une même ligne droite.

Fig. (15). Considérons un prisme quelconque (car il suffit de démontrer cette propriété pour les prismes).

Prenons pour plan (x, y) un plan qui lui soit perpendiculaire. Soit $(a' b' c' d' e' \ldots)$ sa section par ce plan; la distance du centre de gravité au plan (y, z) sera donnée par l'équation

$$x = \frac{(a' b' c')\; x' + a' c' d' \,.\, x'' + \ldots}{a' b' c' \quad + a' c' d' \quad + \ldots}.$$

La distance du centre de gravité de la section $abcde\ldots$ au même plan, sera donnée par

$$X = \frac{abc\; X' + acd\, X'' + \ldots}{abc \quad + acd \quad + \ldots};$$

Or, $x' = X'$, car la distance des centres des triangles $a' b' c'$, abc au plan des (y, z) est évidemment la même. On voit de même que $\qquad x'' = X'' \ldots\ldots$

de plus $\qquad \cos a \,.\, abc = a' b' c'$

$$\cos a \,.\, acd = a' c' d'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a étant l'angle du plan du polygone supérieur avec le plan (x,y), donc

$$X=\frac{abc\,X'+acd\,X''+\ldots}{abc\quad+acd\quad+\ldots}=\frac{\frac{a'b'c'}{\cos a}.x'+\frac{a'c'd'}{\cos a}x''+\ldots}{\frac{a'b'c'}{\cos a}+\frac{a'c'd'}{\cos a}+\ldots}=x.$$

Donc les distances des centres de gravité des deux sections au plan (y,z) sont égales; donc ces centres se trouvent dans un même plan parallèle au plan (y,z). On démontreroit de la même manière qu'ils sont aussi dans un même plan parallèle au plan des (x,z).

Ces deux centres se trouvent donc dans une même ligne parallèle à l'axe des z.

Revenons maintenant à nos cylindres.

Soient A et B les deux sections d'un cylindre, ou autrement ses deux faces; soit C la section par un plan perpendiculaire à ses arêtes.

On voit bien évidemment, d'après ce que j'ai démontré, que la ligne qui joint le centre de gravité A, et celui de B, étant représentée par l, l'expression du volume du cylindre sera

$$V=l.C,\quad \text{ou}=l.A.\cos a,\quad \text{ou}=l.B.\cos b,$$

puisque $C=A\cos a=B.\cos b$, a et b étant les angles du plan de A et de B avec celui de C.

4°. Soient PCQ, PBQ, fig. 3, pl. 4, deux courbes égales, dont les centres de gravité soient B' et C', et dont les plans qui se coupent suivant PQ, forment un angle $BAC=\alpha$.

Le volume compris entre ces faces, et la surface cylindrique $PBCQ$, engendrée par une ligne de direction perpendiculaire à PQ, qui glisseroit sur les deux courbes, sera

$$V=PBQ.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).B'C'=PBQ\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).2\,AC'.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

puisque $B'\,C'\,A$ étant un triangle isocèle,

$$B'C'=2.AC'.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

ou en faisant $AC'=r$, $PBQ=S$, $V=S.r.\sin\alpha$.

5°. Maintenant considérons la surface dont les sections, par une suite de plans parallèles, présentent des polygones réguliers semblables, ayant leurs côtés parallèles et leurs centres sur une même droite perpendiculaire aux plans sécans; les surfaces de révolution en sont des cas particuliers. Leur volume se composant d'un nombre de solides semblables à ceux que nous venons d'examiner (4°), égal au nombre des côtés du polygone, on a

$$V = m . r . \sin \alpha . S,$$

(m étant le nombre des côtés du polygone,)

ou puisque $m = \frac{2\pi}{\alpha}$, 2π étant la circonférence dont le rayon est 1,

$$V = 2\pi r . S . \frac{\sin \alpha}{\alpha} .$$

6°. Si la surface est de révolution, le nombre des côtés est infini; l'angle α est égal à zéro, et la formule $V = 2.\pi.r.S.\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ devient

$$V = 2 . \pi . r . S;$$

ce qui démontre le théorème de *Guldin* d'une manière directe.

7°. Si le plan d'une courbe se meut normalement à une courbe quelconque, le volume engendré par l'aire de cette courbe a pour expression

$$V = A . S,$$

(A étant l'aire de la courbe mobile, S étant la courbe décrite par le centre de gravité de cette aire).

En effet, le volume compris entre deux positions voisines de l'aire de la courbe mobile peut être considéré comme celui d'un cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de cette aire.

La somme des élémens successifs du volume, ou le volume lui-même, est donc

$$A (l + l' + l'' + ...),$$

l étant la ligne qui joint les centres de gravité de deux positions voisines de l'aire mobile; l' étant ...... Or $l + l' + l'' + ...$ forment la courbe décrite par le centre de gravité; donc, etc.

Ce théorême comprend aussi les surfaces de révolution, puisqu'elles sont engendrées par une courbe dont le plan se meut normalement à un cercle.

Problêmes de Géométrie (*).

1°. Mener un cercle tangent à trois cercles donnés?

2°. Par un point donné dans le plan d'un parallélogramme, mener avec la règle un parallèle à une droite située dans ce plan?

Le premier problême peut se ramener à celui-ci : Mener par un point un cercle tangent à deux cercles donnés, en diminuant ou augmentant le rayon du cercle cherché du rayon du plus petit des trois cercles, suivant qu'il doit toucher ce dernier cercle extérieurement ou intérieurement, ce qui revient à augmenter ou diminuer également les rayons des deux autres cercles d'après la nature de leur point de contact.

Je vais d'abord démontrer la proposition suivante sur laquelle se fonde la solution du problême dont il est question : Si par le point O, fig. 4, pl. 4, où se coupent les tangentes extérieures communes aux cercles X et Y, et par le point A où doit passer le cercle tangent à ces deux cercles, on mène une droite AO, que l'on fasse passer ensuite par le point O une sécante quelconque OT, qui vient couper les cercles X et Y intérieurement en T et T'; qu'enfin par ces deux points T et T' et par le point A on fasse passer un cercle, cette circonférence de cercle coupera AO en un point B qui sera le même, quelle que soit la sécante OT.

En effet, OB et OT étant les sécantes d'un même cercle ABT, on a :

$$AO \times OB = OT \times OT'.$$

Mais si l'on mène une nouvelle sécante Ot, on a aussi (voyez la page 20 du 1er vol. de la Correspondance),

$$OT \times OT' = Ot \times Ot' ;$$

donc

$$AO \times OB = Ot \times Ot' \qquad (1).$$

Il est évident, d'après cette dernière équation (1), que les quatre points T, T', A et B sont placés sur une même circonférence de cercle.

(*) Les solutions des deux problêmes suivans m'ont été communiquées par M. Poncelet, admis cette année dans le génie militaire.

H. C.

Il est démontré aussi dans l'article cité, que tout cercle tangent aux cercles X et Y, a ses deux points de contact placés sur une droite qui passe par le point O, dans les deux cas où il laisse entièrement hors de sa circonférence, ou qu'il renferme à-la-fois les deux cercles X et Y. Il suit de là et de ce que j'ai démontré plus haut, que le cercle tangent aux cercles X et Y, et qui passe par le point A, passe aussi par le point B. Ainsi le problême dont il s'agit se trouve ramené à celui-ci : Par deux points A et B, mener un cercle qui touche le cercle X ou Y.

Comme ce dernier problême est susceptible de deux solutions, il est bon de faire voir que celle qui correspond au cas où le cercle est touché extérieurement, appartient aussi au cercle qui, passant par le point A, toucheroit extérieurement les cercles X et Y.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que tout cercle passant par le point A et par deux points p et p', où une sécante quelconque Ot vient couper extérieurement les cercles X et Y, passera aussi par le même point B; car alors le cercle qui passe par le point A, et qui touche extérieurement les cercles X et Y, ayant ses points de contact dans la direction du point O, passera évidemment par les points A et B. Or, on voit sans peine (*) que $OT \times OT' = Op \times Op'$; donc, d'après l'équation (1),

$$Op \times Op' = AO \times OB.$$

Cette équation prouve que les points A, B, p, p', sont placés sur la même circonférence de cercle.

Voici maintenant comment on achevera la solution du problême : Ayant tracé le cercle ATT', ainsi que je l'ai dit, on menera la corde lT qui coupera AO en un point P. Par ce point on menera les tangentes Pm, Pm', au cercle X; et les points m et m' de contact seront les points de tangence des cercles cherchés, dont l'un touche intérieurement, et l'autre extérieurement, le cercle X. En effet, on a

$$Pm^2 = Pl \times PT;$$

or
$$Pl \times PT = PB \times PA;$$

donc
$$Pm^2 = PB \times PA.$$

Cette dernière équation prouve évidemment que le cercle qui

(*) Il suffit de comparer chacun des produits $OT \times OT'$, $Op \times Op'$, au produit qu'on obtiendroit pour la tangente commune aux cercles X et Y.

passeroit par les trois points A, B et m, seroit touché par la droite Pm en m. On conclut aussi de la même équation, Pm' étant égal à Pm, que le cercle ABm', touche le cercle X en m'.

En considérant le point O', où se croisent les tangentes intérieures, communes aux cercles X et Y, on obtiendroit, par une construction semblable, deux autres solutions du problême de mener par un point un cercle tangent à deux cercles donnés. On peut voir facilement, en examinant les différentes circonstances du contact, que ce dernier problême est susceptible de quatre solutions, et que par conséquent il se trouve entièrement résolu par ce que j'ai dit.

Voici une proposition analogue à celle que j'ai démontrée précédemment, et qui donne une solution simple du problême de mener une sphère tangente à quatre sphères données.

Si par la droite qui joint les sommets des trois cônes circonscrits deux à deux à trois sphères, et par un point donné, on mène un plan P; qu'ensuite par la même droite on mène un plan qui coupe les sphères; que par le cercle tangent aux cercles d'intersection et par le point donné, on fasse passer la surface d'une sphère, cette surface coupera le plan P suivant un cercle qui restera le même, quelle que soit la section qu'on ait faite dans les sphères. On voit aisément que la sphère qui passe par le point donné, et qui est tangente aux trois sphères dont il s'agit, devra passer aussi par ce cercle; car cette sphère doit avoir ses points de contact placés sur un plan qui passe par la droite qui joint les trois sommets des cônes.

Solution du second problême (voyez n°. 8 du 1er volume de la Correspondance, pag. 305.)

« Par un point A, fig. 5, pl. 5, donné dans le plan d'un parallélogramme $BCDE$, mener avec la règle une parallèle à la droite MN située dans ce plan. »

Prolongez les côtés BE et DE jusqu'à leur rencontre avec MN; par ces points de rencontre et par un point quelconque K de la diagonale EC, menez les droites KG et KH qui viennent couper les deux autres côtés du parallélogramme respectivement en G et en H; menez la droite GH qui sera parallèle à MN. On achevera ensuite la solution, d'après ce qui a été dit dans le n°. 8 du premier volume de la Correspondance, où il s'agissoit de mener par un point donné une droite qui allât concourir avec deux droites données, sans employer le compas;

car la solution convient aussi au cas où les deux droites sont parallèles, comme le sont les droites MN et GH.

Il resteroit à démontrer ce qui est supposé dans cette solution, savoir, que GH est parallèle à MN. Pour cela j'observe que le triangle MEK étant semblable au triangle CKH, et le triangle EKI au triangle CKG, on a la proportion

$$GC : CH :: EI : ME.$$

De plus, les angles MEI, GCH, sont égaux; donc les triangles MEI et GCH sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels, et la droite GH est parallèle à MN. C. Q. F. D.

Sur le point brillant d'une surface de révolution.

M. Delavenne (élève admis cette année dans l'artillerie) m'a remis une note sur la détermination du point brillant d'une surface de révolution. Il propose une modification à la solution que j'ai donnée page 303 du 1er volume de la Correspondance. Il suppose qu'on ait construit sur la surface de révolution la ligne qui est le lieu des pieds des perpendiculaires à cette surface, abaissées de tous les points de la droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur. Les rayons de lumière réfléchis de tous les points de cette ligne courbe étant projetés sur un des plans de projection, M. Delavenne construit une courbe tangente à ces rayons de lumière projetés; et, par la projection de l'œil sur le même plan, il mène une tangente à cette dernière courbe: cette tangente prolongée coupe la ligne des pieds des normales en un point qui est le point brillant demandé.

Quoique cette construction ne soit pas rigoureuse, puisqu'il faut mener une tangente à une courbe du genre des caustiques par un point donné hors de cette courbe, en faisant tourner une règle autour de ce point jusqu'à ce qu'elle touche la courbe; cependant elle est suffisante pour la pratique, parce qu'elle donne la position de la tangente et le point où cette tangente coupe une courbe connue, sans qu'on soit obligé de considérer le point où elle touche la caustique des rayons réfléchis.

Dans une seconde note, M. Delavenne détermine par une autre considération le point brillant d'une surface de révolution, dans l'hypothèse d'un point lumineux. Il conçoit par le point brillant la normale à la surface, et les rayons incident, réfléchi,

qui correspondent à ce point; il considère ensuite le triangle formé par la portion de normale comprise entre la surface et l'axe de révolution, par le rayon réfléchi et par une parallèle au rayon incident mené par le point où la normale rencontre l'axe de révolution. Ce triangle est isocèle, puisque les rayons incident et réfléchi font avec la normale des angles égaux. Dans tout autre plan normal à la surface, la portion de normale comprise entre la surface et l'axe de révolution, la droite menée vers l'œil par le point où la normale coupe la surface, la parallèle au rayon lumineux qui tombe en ce même point, forment un triangle qui n'est pas isocèle. Donc, si l'on porte le côté de ce triangle, qui est sur la parallèle au rayon incident, sur la direction du rayon réfléchi, on obtiendra sur ce rayon le point d'une courbe, dont l'intersection avec une autre ligne déjà connue (le *lieu* des pieds des perpendiculaires abaissées sur la surface de révolution par la droite qui joint le point lumineux et l'œil) détermine le point brillant de la surface de révolution.

H. C.

MÉCANIQUE.

Un ancien Elève, Directeur des Douanes à Fuligno, département de Trasimène (M. Dubois-Aymé), se promenoit sur le bord de la mer; il aperçut à quelque distance une personne de sa connoissance, et se mit à courir pour l'atteindre; son chien qui s'étoit écarté, courut vers lui en décrivant une courbe dont l'empreinte resta sur le sable. M. Dubois revenant sur ses pas, fut frappé de la régularité de cette courbe, et il en chercha l'équation, en supposant 1°. que le chien se dirigeoit toujours vers le lieu que le maître venoit de quitter; 2°. que le maître parcouroit une ligne droite; 3°. que les vîtesses du maître et du chien étoient uniformes.

Prenant pour axe des y le chemin du maître, et pour axe des x la perpendiculaire abaissée du point de départ du chien sur l'axe des y, on trouve pour l'équation de la courbe,

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{n}{n-1}\cot\left(\tfrac{1}{2}\phi\right)a^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n-1}{n}}-a^{\frac{n-1}{n}}\right) \\ -\dfrac{n}{n+1}\,\mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{2}\phi\right)a^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n+1}{n}}-a^{\frac{n+1}{n}}\right) \end{array}\right\}.$$

dans laquelle n est le rapport des vîtesses du chien et de son

maître, φ l'angle de l'axe des y avec la droite qui réunit les points de départ du maître et du chien.

Cette courbe jouit de la propriété que les rayons de courbure sont proportionnels aux abscisses des points par lesquels on mène ces rayons.

ALGÈBRE.

Résolution de deux Equations à deux inconnues; par M. LEFEBURE, *Répétiteur-Adjoint à l'Ecole Polytechnique.*

L'élimination, considérée sous le point de vue le plus général, offre des difficultés au-dessus de la puissance actuelle de l'algèbre. Mais il y a des cas fort étendus, pour lesquels on a une solution complette. L'on doit sur-tout remarquer celui des équations *algébriques*, où les inconnues ne sont liées que par les quatre premieres opérations. De toutes les méthodes employées dans ce cas, celle des fonctions symétriques est la seule qui donne toutes les solutions de la question sans complication de racines étrangères. Celle qui emploie la marche du plus grand commun diviseur, et que l'on donne dans les élémens d'algèbre pour deux équations à deux inconnues, a l'inconvénient de conduire à une équation finale qui contient des racines étrangères. C'est pour cette raison que Paoli, dans ses élémens d'algèbre, ne fait qu'indiquer cette méthode, à laquelle j'ai donné depuis plusieurs années l'exactitude qui lui manquoit, à-peu-près de la manière qui suit.

La résolution de deux équations à deux inconnues se réduit toujours à celle de deux équations dont les premiers membres n'ont aucun facteur commun. Soient

$$A=0, \qquad B=0.$$

Ces équations, dont x et y sont les inconnues; cherchons-en les solutions.

Supposons que $x=\alpha$, $y=\beta$, soient des valeurs conjuguées qui satisfont à ces équations. Si l'on substitue β au lieu de y, A et B seront changés en deux polynômes A' et B', qui ne contiendront plus que x; et si l'on y fait $x=\alpha$, ils devront devenir nuls : donc ils doivent avoir $x-\alpha$ pour diviseur commun. Réciproquement, si $y=\beta$ substituée dans A et B, fait acquérir à ces polynômes un diviseur $x-\alpha$; $y=\beta$ et $x=\alpha$ formeront une solution des équations $A=0$, $B=0$. Donc *toute valeur de* y, *habile à former une solution aux proposées*

doit faire acquérir à leurs premiers membres un diviseur commun; et vice versâ, *toute valeur de y qui fait acquérir un commun diviseur aux deux premiers membres, est habile à former une solution de ces deux équations* (*).

Il est démontré que tout diviseur commun à deux polynômes doit diviser le reste de leur division, et que tout diviseur commun au diviseur et au reste d'une division, doit diviser le dividende (**). Ordonnons A et B par rapport à x; supposons que A soit, par rapport à cette inconnue, d'un degré plus élevé que B; divisons A par B, et arrêtons l'opération au reste R, que l'on ne peut plus diviser sans prendre des fractions au quotient. D'après le principe que nous venons de rappeler, il est évident que toute valeur β de y, qui fait acquérir un facteur commun à A et B, doit le faire acquérir au reste R; et toute valeur β de y, qui fait acquérir à B et à R un diviseur commun, doit aussi le faire acquérir à A. Donc, $A=0$, $B=0$ *ont les mêmes solutions que les équations* $B=0$, $R=0$ (***).

Supposons qu'en ne prenant au quotient que des termes entiers, on arrive à un reste R qui soit, en x, d'un degré moindre que B; $B=0$, $R=0$ peuvent être traitées à leur tour comme les proposées. Soit R' le reste de la division de B par R, on substituera $R=0$, $R'=0$, aux dernières équations.

(*) Cette conséquence très-simple est le principe fondamental de la théorie de l'abaissement des équations; et sans changer tout-à-fait cette dernière, l'on ne sauroit le supprimer des élémens.

(**) Cette proposition n'a plus de sens dès que le diviseur et le reste ne sont pas entiers. Ce n'est donc pas pour éviter les fractions, qu'on supprime ou qu'on introduit des facteurs dans la recherche du plus grand commun diviseur; c'est par nécessité.

(***) Il est facile de démontrer directement cette proposition. Désignons par Q le quotient de la division, l'on aura $A=BQ+R$. D'où l'on conclut que toute solution de $A=0$, $B=0$, doit rendre $R=0$; et toute solution de $B=0$, et $R=0$, doit résoudre $A=0$.

On doit remarquer que cette conséquence seroit infirmée, si Q étoit fractionnaire de la forme $\frac{H}{K}$. En effet, l'on auroit alors $A=\frac{BH}{K}+R$. Supposons que des valeurs de x et de y rendent $A=0$, $B=0$, il pourroit se faire qu'elles rendissent aussi $K=0$; alors $\frac{BH}{K}$ deviendroit $\frac{0}{0}$, et pourroit avoir une valeur finie ou infinie: donc on ne pourroit plus conclure $R=0$.

C'est de cette manière que j'ai d'abord démontré cette proposition pour rectifier la théorie de l'élimination; mais il est mieux de la tirer de la propriété qui fait trouver le plus grand commun diviseur, et de lier ainsi deux théories entr'elles.

Supposons que chaque division se fasse toujours avec les mêmes conditions que celle de A par B, la division de R par R' donnera un reste R'', et les équations précédentes seront remplacées par

$$R' = 0,\ R'' = 0.$$

Par ce procédé on arrivera enfin à un reste indépendant de x. Soit R'' ce reste, la résolution des equations proposées sera ramenée à celle des équations à une seule inconnue. En effet, elles ont les mêmes solutions que les précédentes; et pour résoudre celles-ci, il suffit de prendre toutes les valeurs de y que peut fournir $R'' = 0$; et en substituant chacune d'elles successivement dans $R' = 0$, on déterminera les valeurs correspondantes de x.

Mais il n'arrivera que dans des cas particuliers, que l'on puisse faire les divisions successives sous les conditions précédemment énoncées ; c'est-à-dire, en ne prenant que des quotiens entiers, et poussant chaque division jusqu'à un reste, dont le premier terme contienne x à un exposant moindre que le premier terme du diviseur. Tâchons de ramener tous les cas à celui-ci. Il suffit pour cela de supprimer dans le diviseur ou d'introduire au besoin des facteurs dans le dividende. Dans la recherche du plus grand commun diviseur, ces opérations n'altèrent pas le résultat qu'on se propose d'obtenir; mais il n'en est pas ainsi dans la recherche qui nous occupe ; il convient donc d'examiner les effets qu'elles doivent produire.

Reprenons les équations $A = 0$, $B = 0$ que je suppose être les proposées, ou deux équations qui en ont pris la place. Supposons que la division de A par B ne puisse pas se faire en termes entiers; ce cas ne peut arriver que parce que le coefficient du premier terme de B contient des facteurs qui ne sont point dans le premier terme de A. Soit D le produit de ces facteurs, et supposons d'abord que D divise tous les termes de B, alors les équations $A = 0$, $B = 0$ peuvent prendre la forme

$$A = 0,\ B'D = 0;$$

or, celles-ci peuvent se résoudre, soit en faisant

$$A = 0,\ B = 0,$$

soit en faisant

$$A = 0,\ D = 0.$$

Donc, on pourra supprimer le facteur D dans le diviseur

pourvu qu'on joigne aux solutions déterminées par la suite du calcul celles des deux dernières équations (*).

Supposons, en deuxième lieu, que D soit un facteur en y étranger au premier terme du dividende, et qui ne soit pas commun à tous les termes du diviseur : la division deviendra possible en termes entiers, en multipliant A par D. Mais alors aux équations $A=0$, $B=0$, l'on substitue $AD=0$, $B=0$. Or, celles-ci sont satisfaites non seulement par les solutions de

$$A=0, B=0,$$

mais encore par celles de

$$D=0, B=0.$$

D'où l'on voit que la suite du calcul doit donner de trop les solutions des deux dernières équations ; donc il faudra les supprimer.

Enfin, il pourroit arriver que parmi les facteurs du premier terme du diviseur qui empêchent la division de réussir, les uns fussent communs à tous les termes du diviseur, et que les autres ne le fussent point. Soit D le produit des premiers, et D' celui des seconds, il ne suffira pas, pour rendre la division possible, de supprimer D dans B ; mais il faudra encore multiplier A par D'. La première opération supprime dans le calcul toutes les solutions de $A=0$, $D=0$; donc il faudra les rétablir : au contraire, la deuxième introduit celles de $D'=0$, $B=0$; donc il faudra les supprimer.

Concluons à présent qu'une marche tout-à-fait semblable à celle qui fait trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, conduira enfin à deux restes, dont le dernier ne contiendra que y. Soient Z' et Z ces deux restes, les équations

$$Z'=0, Z=0$$

donneront les solutions des proposées, abstraction faite de celles que l'on a introduites ou supprimées.

Pour déterminer ces dernières, nommons S, S', etc., les facteurs en y, supprimés pour rendre les divisions possibles sur les dividendes respectifs U, U', etc. ; nommons I, I', etc., les facteurs que l'on a introduits pour rendre possibles les divi-

(*) Il est bon de remarquer, en général, que si B peut se décomposer en facteurs B', B'', etc., l'on pourra ramener la résolution de $A=0$, $B=0$, à celle des systêmes d'équation $A=0$, $B'=0$; $A=0$, $B''=0$; etc.

sions par les diviseurs V, V', etc. Il faut joindre aux solutions de $Z' = o$, $Z = o$, celles des systêmes d'équations

$$U = o, S = o \,;\; U' = o, S' = o \,;\; \text{etc.};$$

et parmi toutes ces solutions réunies, supprimer celles des systêmes suivans :

$$V = o, I = o \,;\; V' = o, I' = o \,;\; \text{etc.}$$

Ce qui précède réduit toute la difficulté à la résolution de deux équations, dont la première est à une seule inconnue. Soient donc

$$M = o, N = o$$

deux semblables équations, M ne contenant que y. Pour les résoudre, il suffit de déduire de la première toutes les valeurs qu'elle donne pour y, et de les substituer dans la deuxième, qui fait alors connoître les valeurs de x correspondantes.

Si une de ces valeurs de y rendoit N égale à une quantité donnée, elle devroit être rejetée. Il est même facile de séparer de $M = o$ cette sorte de racines, sans résoudre aucune équation. Nous ne nous y arrêtons pas.

Nous terminerons par faire remarquer que s'il étoit intéressant d'obtenir l'équation finale, c'est-à-dire celle qui contient toutes les valeurs de y, habiles à former des solutions aux équations proposées $A = o$, $B = o$, et qui n'en contient pas d'autres, l'opération n'auroit aucune difficulté : il suffit, pour y parvenir, d'effectuer des multiplications et des divisions.

Nous ne présentons pas de remarques sur le sujet que nous venons de traiter; celles qui méritent quelqu'attention s'offriront d'elles-mêmes.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES DE PARIS.

On a proposé au dernier concours (de l'an 1810) les deux questions suivantes :

Mathématiques. L'hyperbole dont l'équation est

$$y^2 = \frac{A^2}{B^2} \left(x^2 + B^2 \right),$$

étant supposé faire une révolution autour de l'axe des x, trouver

1°. L'équation de la surface du solide engendré par cette révolution ;

2°. Par un point quelconque pris sur cette surface et déterminé par les trois coordonnées f, g, h (dont deux f, g, sont dirigées suivant les axes des x et y de l'hyperbole génératrice, et la troisième h, est perpendiculaire à leur plan), faire passer une ligne droite qui soit située toute entière sur cette surface.

Pour satisfaire à la seconde partie, il faudra prouver qu'en effet une ligne droite peut être menée par le point donné, de manière que tous ses points se trouvent sur la surface de l'hyperboloïde dont il s'agit, et donner en même-temps les deux équations de cette droite.

(Voyez l'article *hyperboloïde de révolution*, page 242 du 1^er^. volume de la Correspondance).

Physique. Expliquer le phénomène produit par l'instrument électrique, appelé *Bouteille de Leyde*. On fera voir comment s'exercent les actions électriques qui conduisent la bouteille par degrés jusqu'au terme où elle est chargée à saturation.

On supposera que la décharge s'opère soit par des contacts alternatifs, soit d'une manière subite, et l'on exposera les effets qui ont lieu dans l'un et l'autre cas.

MM. Larabie et Lacave, élèves du Lycée Napoléon, tous deux admis cette année à l'Ecole Polytechnique, ont obtenu l'un le prix de mathématiques, et l'autre le prix de physique.

§. II.

SCIENCES PHYSIQUES.

De la double Réfraction de la Lumière, par M. Hachette.

La connoissance du phénomène de la double réfraction est due à Erasme Bartholin, Danois, auteur d'un *Traité sur le Cristal d'Islande*, imprimé à Copenhague en 1670. Huygens a, le premier, découvert la loi que suit la lumière en se réfractant dans ce cristal ; l'hypothèse qui l'a conduit à cette découverte, l'accord parfait des principaux phénomènes de la double réfraction avec cette hypothèse, sont l'objet d'un Traité sur la Lumière, écrit en françois, et publié à La Haye en 1690.

En 1809, M. Laplace a fait voir (*) que la loi de la réfraction découverte par Huygens étoit une conséquence *du principe de moindre action*. Ce principe, appliqué au mouvement de la lumière, se réduit à ce que la lumière parvient d'un point pris au-dehors d'un cristal, à un point pris dans l'intérieur de ce même cristal, par une route telle, que si on ajoute le produit de la droite que la lumière décrit au-dehors par sa vitesse primitive, par le produit de la droite qu'elle décrit au-dedans par sa vitesse correspondante, la somme soit un *minimum*; d'où il conclut que la réfraction ordinaire et la réfraction extraordinaire de la lumière dans le cristal d'Islande sont dues à des forces de même genre, attractives et répulsives, et dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles.

De la Réfraction d'un rayon de lumière dans le cristal d'Islande.

Le cristal d'Islande est de forme rhomboïde. Chaque face est un rhombe dont l'angle obtus est de 101° 55′ (division en 360°). Deux des angles trièdes du rhomboïde sont composés des angles obtus de trois rhombes égaux, qui se réunissent aux sommets de ces angles. La droite qui joint ces deux sommets, est *l'axe du cristal*. On nomme *section principale* d'une face quelconque naturelle ou artificielle du cristal, la section faite dans ce cristal par un plan mené perpendiculairement à la face et parallèlement à l'axe du cristal.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe sous un angle quelconque sur une face plane naturelle ou artificielle d'un cristal d'Islande, il se décompose en deux rayons réfractés; le premier de ces rayons est dans le plan incident, c'est-à-dire dans le plan mené par le rayon incident perpendiculairement à la face; le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est constant pour ce rayon, qu'on nomme par cette raison *rayon ordinaire*; ce rapport est, d'après les expériences, 1,656.

Pour déterminer la position du second rayon, ou du rayon extraordinaire, que l'on se représente un ellipsoïde de révolution, qui a son centre au point d'incidence du rayon de lumière direct, et dont l'axe de révolution est parallèle à l'axe du cristal; le rayon extraordinaire se dirige nécessairement suivant un diamètre de l'ellipsoïde, donc, si par ce diamètre

(*) Voyez le nouveau *Bulletin de la Société Philomatique*, pag. 303 du 1er. volume.

et par l'axe de révolution, petit axe de l'ellipsoïde, on imagine l'ellipse génératrice, la direction du rayon extraordinaire se confond avec l'un des diamètres de cette ellipse. Nommant a et b les demi-axes de l'ellipsoïde ou de l'ellipse génératrice, on démontre dans tous les traités de géométrie analytique, que V étant l'angle d'un diamètre de l'ellipse génératrice, avec le petit axe $2b$, on a pour l'expression d'un diamètre

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 V}}.$$

M. Laplace a prouvé par le principe de la moindre action, que la vitesse du rayon direct dans le vide étant l'unité, on pouvoit prendre pour la vitesse du rayon extraordinaire suivant un diamètre de l'ellipsoïde, une quantité égale à l'unité divisée par ce diamètre; cette expression de la vitesse du rayon extraordinaire, qui s'accorde avec la loi d'Huygens, devient

$$\frac{1}{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 V}}} \text{ ou } \frac{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 V}}{ab};$$

d'où il suit: 1°. que, lorsque le rayon extraordinaire se réfractera dans le sens de l'axe du cristal, sa vitesse sera $\frac{1}{b}$, puisque, dans ce cas, $\sin V = 0$; 2°. lorsque le rayon extraordinaire se réfractera perpendiculairement à l'axe du cristal, sa vitesse sera $\frac{1}{a}$, puisqu'alors $\sin V = 1$.

Lorsque la face d'incidence est perpendiculaire à l'axe du cristal, et que le rayon direct est parallèle à cet axe, les rayons ordinaire et extraordinaire qui résultent de la double réfraction se confondent; ils sont tous deux dirigés suivant une parallèle à l'axe du cristal; mais dans ce cas la vitesse du rayon extraordinaire est $\frac{1}{b}$, donc la vitesse du rayon ordinaire est la même; d'où il suit que b est le rapport de la vitesse 1 du rayon direct dans le vide à la vitesse $\frac{1}{b}$ du rayon ordinaire dans le cristal; donc b est, ainsi qu'Huygens l'avoit déjà remarqué, le rapport des sinus d'incidence et de réfraction du rayon ordinaire; rapport qu'on a trouvé par expérience de 1,656.

La droite suivant laquelle la double réfraction se réduit à une réfraction simple, est une ligne très-remarquable dans les substances du genre du cristal d'Islande; on la nomme *Axe de réfraction*. Il paroît qu'en général cet axe est placé symétriquement par rapport aux faces des cristaux de forme primitive.

On détermine par une seconde expérience dont il sera question ci-après, la valeur du demi grand axe a de l'ellipsoïde.

Cela posé, quel que soit le rayon incident, pour trouver le rayon réfracté extraordinaire, on imaginera le plan d'incidence qui passe par le rayon direct et par une perpendiculaire à la face d'incidence; on menera dans ce plan et par le point d'incidence, une perpendiculaire au rayon direct; on placera dans l'angle de cette perpendiculaire et de sa projection sur la face d'incidence, une droite parallèle au rayon direct qui représente la vitesse de ce rayon dans le vide, et qu'on peut supposer égale à l'unité : par le point où cette droite rencontre la projection du rayon direct, on élève une perpendiculaire au plan d'incidence; enfin par cette droite on mène un plan tangent à l'ellipsoïde de révolution, qui a un centre au point d'incidence, et dont on a déterminé les axes $2a$ et $2b$. Le diamètre de l'ellipsoïde qui passe par le point de contact est la droite suivant laquelle se dirige le rayon réfracté extraordinaire.

Cette construction géométrique est une conséquence de la loi d'Huygens.

On résout graphiquement la question relative au plan tangent à l'ellipsoïde, par les méthodes connues de la géométrie descriptive. On voit cette solution, dessin *A*, pl. 5.

Explication du dessin A, composé de trois figures, fig. 1 *a*, fig. 1 *b*, fig. 1 *c*, *pl.* 5.

La fig. 1 *a* est une projection verticale faite parallèlement au plan d'incidence du rayon de lumière *LI*, tombant sur la face *AC*, naturelle ou artificielle, du cristal *ABCD*.

La fig. 1 *b* est une projection horizontale faite parallèlement à la face d'incidence *AC* (fig. 1 *a*), *ABCD* (fig. 1 *b*).

MN (fig. 1 *b*) étant la projection horizontale de l'axe du cristal, la fig. 1 *c* est une projection verticale, parallèle au plan vertical passant par la projection horizontale de l'axe *MN* (fig. 1 *a*, fig. 1 *b*) du cristal.

SR (fig. 1 *a*) étant la vitesse de la lumière dans le vide, *IM*, *IP* (fig 1 *c*) étant les demi-axes de l'ellipsoïde de révolution, il s'agit de trouver la direction du rayon extraordinaire, ou les projections *I* ω de ce rayon sur les plans fig. 1 *a*, fig. 1 *b*.

Du plan tangent à l'ellipsoïde de révolution, mené par une droite donnée hors de cet ellipsoïde.

Soient *I R* (fig. 1 *a*) une droite perpendiculaire au rayon de lumière *IL*, et *SR* une parallèle à ce rayon, dont la longueur comprise dans l'angle *AIR* représente la vitesse de la lumière dans le vide. Ayant élevé la perpendiculaire *ST* (fig. 1 *b*) à *IAS*, cette perpendiculaire est la droite par laquelle il s'agit

de mener le plan tangent à l'ellipsoïde dont le centre est en I.

Le plan vertical MN, fig. 1 b, coupe l'ellipsoïde de révolution suivant l'ellipse génératrice $MNPQ$ (fig. 1 c), et la droite ST au point T, qui se projette en T' (fig. 1 c). On considère ce point comme le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde. Ce cône touche l'ellipsoïde suivant une ellipse projettée (fig. 1 c) suivant la droite UV, qui joint les points de contact de l'ellipse génératrice et des tangentes $T'U$, $T'V$. L'horizontale $I'T'$ (fig. 1 c) divisant la droite UV en deux parties égales au point O, si on mène la parallèle Op à IP, qui coupe l'axe MN au point i, l'ordonnée OU' du cercle décrit du point i comme faite avec ip pour rayon, et la droite $OU = OV$ seront les demi-axes principaux de l'ellipse, base du cône circonscrit. Le demi-axe dont la longueur est OU' est dirigé suivant la droite Ox (fig. 1 b) parallèle à II', et coupe la droite ST au point X; or, le plan tangent demandé contiendra la tangente à la base du cône circonscrit, menée par le point X; donc si l'on fait tourner le plan de cette base autour de la droite Xx comme charnière, jusqu'à ce qu'elle soit appliquée sur le plan de la fig. 1 b, $xu = OU'$ sera l'un des axes de cette base, et le cercle décrit du point x comme centre avec xu pour rayon, aura même sous-tangente que l'ellipse, base du cône. D'où il suit qu'en menant par le point X la tangente XY au cercle du rayon xu, la tangente menée par le même point à l'ellipse, base du cône, touchera cette ellipse en un point dont la projection horizontale (fig. 1 b) sera sur $Y\omega$ parallèle à MN. Projettant Y en Y' (fig. 1 c) sur l'horizontale $I'T'$, et ramenant le point Y' en ω' par un arc de cercle décrit du point I' comme centre avec $I'Y'$ pour rayon; ω et ω' sont les deux projections (fig. 1 b, fig. 1 c) des points où le plan tangent à l'ellipsoïde de révolution mené par l'horizontale ST, touche cet ellipsoïde. La droite $I\omega$ (fig. 1 a, fig. 1 b) qui joint le point de contact et le centre de l'ellipsoïde, est la direction du rayon extraordinaire correspondant au rayon incident IL.

En appliquant ce calcul à cette construction, on détermineroit les angles du rayon extraordinaire avec les plans de la section principale du cristal et de la face d'incidence; mais pour simplifier ce calcul, nous considérerons un rayon direct dans le plan de la section principale, rayon qui se réfracte extraordinairement dans ce même plan suivant un diamètre d de l'ellipsoïde.

On a, d'après les propriétés des sections coniques,

$$(E) \qquad d = \frac{ab.}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 V.}}$$ V étant l'angle du diamètre d avec l'axe de révolution $2b$, et si on nomme d' le diamètre conjugué de d,

(F). $d^2+d'^2=a^2+b^2$. (G) $dd' \sin A=ab$,

A étant l'angle des diamètres d et d', ou du diamètre d et de la tangente à l'ellipse génératrice, menée par l'extrémité d.

Soient (Fig. 1c pl. v) $I'V$ le diamètre d, $T'VI'$ l'angle A. Dans le triangle $T'I'V$, l'angle I' est le complément de l'angle θ' de réfraction ; donc le sinus de l'angle $I'T'V$ est égal au sinus de $(A+90^\circ-\theta')$ ou au cosinus de $(A-\theta')$;

donc $\sin I'T'V = \sin A \sin\theta' + \cos A \cos\theta'$,

$$\text{et } I'T' = \frac{d \sin A}{\sin I'T'V} = \frac{d \sin A}{\sin A \sin\theta' + \cos A \cos\theta'}.$$

Cette expression est la valeur de IS (Fig. 1a), lorsque le rayon direct IL est dans le plan de la section principale; donc pour ce cas, qui est celui que nous considérons, on connoît dans le triangle rectangle SRI, le côté SI, et le côté SR qui représente la vîtesse 1 du rayon direct; donc l'angle RIS égal à l'angle θ d'incidence de ce rayon, a pour sinus $\frac{1}{IS}$, ou

$$(H) \qquad \frac{\sin A \sin\theta' + \cos A \cos\theta'}{d \sin A} = \sin\theta.$$

Nommant λ l'angle de la face d'incidence et du plan perpendiculaire à l'axe du cristal, on a $V=\theta'-\lambda$. Mettant cette valeur dans l'équation (E), on a

$$(K). \qquad d = \frac{ab}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2(\theta'-\lambda)}}$$

Ayant éliminé de l'équation (H), les quantités d, d', A au moyen des équations (K), (F), (G); l'équation résultante ne contiendra plus que θ, θ', λ, a et b. Faisant tomber un rayon de lumière direct dans le plan de la section principale, et observant les angles θ et θ', on déterminera d'après cette équation la valeur a du demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution.

La mesure des angles θ et θ' peut se faire sur un cristal quelconque, sans qu'on soit obligé de changer les faces naturelles ou artificielles de ce cristal; mais si on suppose que le cristal ait été taillé de manière que la face d'incidence fût parallèle à l'axe de réfraction, la mesure des angles θ et θ' devient beaucoup plus simple, ainsi que M. Malus l'a observé, page 138 de sa *Théorie de la double réfraction*; car, dans ce cas, le plan d'incidence coupe l'ellipsoïde de révolution suivant un cercle du rayon a; alors quel que soit le rayon direct, le rayon extraordinaire se dirige d'après la construction géométrique d'Huygens, dans le plan de ce cercle; d'où il suit que le rapport du sinus d'incidence et de réfraction extraordinaire est constant et égal à a; donc l'observation des angles d'incidence et de réfraction dans le plan du cercle perpendiculaire au petit axe $2b$, donne directement la valeur $2a$ du grand axe de l'ellipsoïde.

De la Polarisation de la Lumière.

La lumière se polarise par réfraction et par réflexion. On a observé la polarisation par réfraction dans les substances diaphanes (*) du genre du cristal d'Islande, capables de la double réfraction. Cette modification de la lumière consiste en ce qu'un rayon lumineux polarisé étant convenablement placé par rapport à une substance diaphane capable de la double réfraction, il ne se décompose plus en rayon ordinaire et extraordinaire; il traverse cette substance, ou comme un rayon ordinaire, ou comme un rayon extraordinaire.

De la Polarisation par réfraction.

Voici de quelle manière Huygens s'exprime sur cette propriété de la lumiere : « Devant que de finir le traité de ce » cristal (d'Islande), j'ajouterai encore un phénomène mer- » veilleux, que j'ai découvert après avoir écrit tout ce que dessus. » Car bien que je n'en aie pas trouvé jusqu'ici la cause, » je ne veux pas laisser pour cela de l'indiquer, afin de donner » occasion à d'autres de la chercher. Il semble qu'il faudroit » faire encore d'autres suppositions, outre celles que j'ai faites, » qui ne laisseront pas pour cela de garder toute leur vraisem- » blance, après avoir été confirmées par tant de preuves. »

» Le phénomène est qu'en prenant deux morceaux (**) de ce » cristal, et les appliquant l'un sur l'autre, ou bien les tenant avec » de l'espace entre deux, si tous les côtés de l'un sont parallèles « à ceux de l'autre, alors un rayon de lumière, comme *AB* (fig. 2, » pl. 5), s'étant partagé en deux dans le premier morceau, savoir » en *BD* et en *BC*, suivant les deux réfractions régulière et » irrégulière; en pénétrant de-là à l'autre morceau, chaque » rayon y passera sans plus se partager en deux; mais celui » qui a été fait de la réfraction régulière, comme ici *DG*, » fera seulement encore une réfraction régulière en *GH*; et » l'autre *CE*, une irrégulière en *EF*; et la même chose arrive » non-seulement dans cette disposition, mais aussi dans toutes » celles où la section principale de l'un et l'autre morceau se » trouve dans un même plan, sans qu'il soit besoin que les » deux surfaces qui se regardent soient parallèles. Or, il est » merveilleux pourquoi les rayons *CE* et *DG* venant de l'air » sur le cristal inférieur, ne se partagent pas de même que » le premier rayon *AB*. On diroit qu'il faut que le rayon *DG*,

---

(*) Les substances connues de ce genre sont : Le spath d'Islande. — L'arragonite. — La chaux sulfatée. — La barite sulfatée. — La strontiane sulfatée. — La soude boratée. — Le quartz. — Le zircon. — Le corindon. — La cimophane. — L'émeraude. — L'euclase. — Le feldspath. — La mésotype. — Le péridot. — Le soufre. — Le mellite. — Le plomb carbonaté. — Le fer sulfaté.

(**) M. Malus a, le premier, fait voir que deux cristaux quelconques à double réfraction et de nature différente, présentoient le même phénomène.

» en passant par le morceau de dessus, ait perdu ce qui est » nécessaire pour mouvoir la matière qui sert à la réfraction » régulière; mais il y a encore autre chose qui renverse ce » raisonnement. C'est que, quand on dispose les deux cristaux » en sorte que les plans qui font les sections principales, se » coupent à angles droits, soit que les surfaces qui se regardent » soient parallèles ou non, alors le rayon qui est venu de la » réfraction régulière, comme *DG*, ne fait plus qu'une réfrac- » tion irrégulière dans le morceau inférieur; et au contraire, » le rayon qui est venu de la réfraction irrégulière, comme *CE*, » ne fait plus qu'une réfraction régulière. Mais dans toutes les » autres positions infinies, outre celles que je viens de déter- » miner, les rayons *DG*, *CE* se partagent de rechef chacun en » deux, par la réfraction du cristal inférieur, de sorte que du » seul rayon *AB* il s'en fait quatre, tantôt d'égale clarté, tantôt » de bien moindre les uns que les autres, selon la diverse » rencontre des positions des cristaux, mais qui ne paroissent » pas avoir ensemble plus de lumière que le seul rayon *AB*.

. . . .

» Pour dire comment cela se fait, je n'ai rien trouvé jusqu'ici » qui me satisfasse. »

Quoique la cause de la polarisation ne soit pas plus connue maintenant qu'elle ne l'étoit à l'époque où Huygens publioit son *Traité de la Lumière*, les nouvelles expériences de M. Malus ont appris que toutes les substances opaques ou diaphanes pouvoient polariser la lumière.

De la Polarisation par réflexion et par réfraction.

Soient *HO* (fig. 3, pl. 5) un plan horizontal, *MN* une glace non étamée, *LI* un rayon lumineux, faisant avec l'horison un angle de 19° 10′, et avec la glace *MN* un angle *MIL* de 35° 25′. Ce rayon se réfléchissant en partie suivant une verticale *II'*, telle que l'angle *NII'* soit aussi de 35° 25′, le rayon réfléchi *II'* est *polarisé*. Si on faisoit tomber ce rayon sur un cristal d'Islande dans le plan de sa section principale, et si ce plan étoit perpendiculaire à la glace *MN*, il n'éprouveroit pas la double réfraction. En faisant tomber ce même rayon *II'* sur une autre glace non étamée *M'N'* parallèle à *MN*, il se réfléchiroit en partie suivant *I'L'*, d'après la loi ordinaire de réflexion; mais si on fait tourner la glace *M'N'* autour de la droite *II'*, en faisant avec cette droite le même angle, de manière qu'elle soit toujours tangente au cône droit dont l'axe seroit *II'* et l'arête *I'M'*, elle arrivera dans une position telle, que la réflexion partielle du rayon lumineux *II'* n'aura plus lieu; ce rayon déjà polarisé se réfractera dans l'intérieur de la glace *M'N'*, et sortira encore *polarisé* de cette glace.

La lumière réfractée en *Ii* est en partie polarisée. Pour séparer

la partie polarisée de celle qui ne l'est pas, on la fait passer à travers une suite de glaces parallèles à *MN*. La lumière directe, qui a échappé à la polarisation de l'une des glaces, se polarise en partie sur la glace suivante, et on obtient par ce moyen un rayon *Ii*, qui est totalement polarisé en sens contraire du rayon réfléchi *II'*; c'est-à-dire qui se réfracte extraordinairement, tandis que le rayon réfléchi *II'* se réfracte ordinairement, lorsqu'ils passent ensemble dans le plan de la section principale d'un cristal à double réfraction, perpendiculaire à la glace *MN*. Pour vérifier cette différence de polarisation, on peut placer en *m n* un petit miroir étamé, parallèle à la glace *MN'*; le rayon *Ii* se réfléchit en *ii'* parallèlement à *II'*. Ayant transporté la glace *M'N'* en *m'n'* parallèlement à elle-même jusqu'au point d'incidence *i'* du rayon *ii'*, ce rayon *ii'* sera entièrement réfracté par la glace *m' n'*. Il faut se rappeler que par rapport au rayon *II'*, cette réfraction totale n'a eu lieu que lorsque l'extrémité *M'* de la glace eut décrit un quart de circonférence.

Dans cette expérience on décompose, par réflexion et par réfraction, un rayon direct en rayon ordinaire et extraordinaire, et une substance diaphane quelconque remplace pour cette décomposition le cristal d'Islande, ou tout autre substance jouissant de la double réfraction.

L'angle sous lequel une substance diaphane décompose la lumière en rayon ordinaire et extraordinaire, l'un par réflexion et l'autre par réfraction, varie dans les différentes substances.

Toutes les fois qu'on produit par un moyen quelconque un rayon polarisé, on obtient nécessairement un second rayon polarisé dans un sens diamétralement opposé; et ces rayons suivent des routes différentes. La lumière ne peut pas recevoir cette modification dans un sens, sans qu'une partie proportionnelle ne la reçoive dans le sens contraire.

De l'Evaporation de l'eau dans le vide, et du froid artificiel produit par cette évaporation.

On place sous le récipient d'une machine pneumatique deux vases, dont l'un contient de l'eau, et l'autre de l'acide sulfurique. Après avoir fait le vide sous le récipient, on ferme la communication de ce récipient avec les corps de pompes. On obtient le vide d'autant plus facilement que le récipient est plus petit, et on gagne encore du temps en fermant les vases qui con-

tiennent l'acide et l'eau, par des obturateurs, et en ne soulevant cet obturateur(*) que lorsque l'air atmosphérique est enlevé. Le vide étant fait, et l'acide communiquant avec l'eau, on observera, après un certain temps, qui dépend de la quantité d'eau et de l'état hygrométrique de l'acide, que l'eau gèle et que l'acide s'échauffe. Ce double effet est dû à l'évaporation de l'eau dans le vide, et à la combinaison des vapeurs d'eau avec l'acide sulfurique. La propriété hygrométrique de l'acide tient lieu, dans ce cas-ci, du moteur, qui enleveroit, par le jeu des pistons de la machine pneumatique, la vapeur d'eau, à mesure qu'elle se formeroit. L'action chimique, plus continue et plus rapide que l'action mécanique, entretient sous le récipient le vide qui favorise l'évaporation de l'eau. L'absorption du calorique nécessaire pour convertir une partie de l'eau liquide en vapeurs, convertit l'autre partie en glace.

On peut, au lieu d'acide sulfurique, employer le muriate de chaux. A défaut d'un récipient de machine pneumatique, on conçoit facilement un vase dont on enleveroit l'air atmosphérique par un courant de vapeurs d'eau à 100°. comme dans les cylindres de pompes à feu. Cette vapeur étant condensée par refroidissement, on peut faire communiquer le cylindre par des tuyaux à robinets à deux vases, qui contiennent, l'un, l'acide sulfurique, l'autre, l'eau à évaporer. Alors on obtiendra les mêmes effets que sous le récipient de la machine pneumatique; l'eau se gelera, et la glace qu'on obtiendra par ce moyen ne coûtera que le combustible nécessaire pour rectifier l'acide sulfurique qui aura servi à la condensation de la vapeur d'eau formée dans le vide.

M. Leslie, physicien anglais, qui a le premier fait les expériences que nous venons de rapporter, s'est aussi servi d'un espace rempli d'un air très-dilaté, pour l'évaporation de la glace. Ayant fait geler plusieurs couches d'eau sur un tube de thermomètre, et l'ayant habillé par ce moyen d'une couche de glace, il l'a suspendu dans le récipient d'une machine pneumatique, rempli d'un air soumis à une pression d'environ un centimètre de mercure; il a placé dans le même récipient un vase contenant de l'acide sulfurique; la glace s'est évaporée, et le thermomètre a baissé jusqu'à — 37°. Réaumur; la température de l'atmosphère étant....

(*) Les obturateurs sont un obstacle à la formation des vapeurs d'eau et d'acide dans le vide, et au mélange de ces vapeurs avec l'air atmosphérique. L'acide sulfurique entre, suivant Bergman, en ébullition à la température de 282° du thermomètre centigrade, sous la pression atmosphérique. On n'a pas encore déterminé la force expansive de la vapeur de cet acide pour des températures inférieures; il paroît qu'elle est très-petite à la température même la plus élevée de l'atmosphère.

Le 20 avril 1811, le thermomètre Réaumur étant à $+ 13°$ j'ai fait geler six grammes d'eau dans une capsule de cuivre jaune du poids de trente-un grammes. L'acide sulfurique du commerce à 66° étoit placé sous le récipient, dans des capsules en verre; l'une, supérieure, contenoit environ cent grammes d'acide, et l'autre, inférieure, sept cents grammes. La température de l'acide s'est élevée de 13° à 20° dans la capsule supérieure, et de 13° à 15° dans l'inférieure.

Les six grammes d'eau ont été gelés en trois minutes, à compter du moment où le vide a été fait sous le récipient. Après quinze minutes, le thermomètre plongé dans la glace, étoit à $-6°$ Réaumur. J'ai pesé la quantité d'eau évaporée, que j'ai trouvée de 1,6 grammes. Ce poids observé diffère peu du poids calculé, qu'on déduiroit de la connoissance des calorique spécifiques de l'eau et du cuivre de la capsule.

Lorsqu'on a pour objet de produire un froid artificiel par l'évaporation dans le vide ou dans un air très-dilaté, on évite autant que possible le retour du calorique du vase qui contient la substance hygrométrique vers le vase qui contient le liquide à évaporer. Mais si l'on se propose seulement de produire l'évaporation, on la favorisera en faisant communiquer ces vases, de manière que le calorique passe alternativement du premier au second. Un physicien (M. Clément) a déjà proposé d'employer ce mode d'évaporation par l'intermédiaire d'un air très-dilaté, pour la réduction des sirops, pour le dessèchement des substances nutritives, animales et végétales, pour la fabrication de la poudre à canon, des colles-fortes, etc. H. C.

Sur le Nautile-Marin, par MM. Coessin frères (*).

Le nautile-marin a pour objet d'établir une navigation sous-marine. Les expériences faites au Hâvre avec l'autorisation du Ministre de la Marine, paroissent ne laisser aucun doute sur la possibilité de cette navigation. Dans un rapport fait à l'Institut le 1er avril 1811, et adopté par la classe des Sciences physiques et mathématiques, le rapporteur, M. Carnot, donne la description suivante du nautile-marin :

« C'est une espèce de grand tonneau qui a la forme d'un ellipsoïde alongé. C'est dans cet ellipsoïde que s'enferment les navigateurs. Ce nautile avoit vingt-sept pieds de longueur (8,77 mètres) et renfermoit neuf personnes.

Pour le maintenir dans sa position, on le charge d'un lest.

Ce nautile est partagé en trois parties séparées l'une de l'autre

---

(*) M. Coëssin jeune est un ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, actuellement officier d'artillerie.

par des doubles fonds. La partie du milieu est seule occupée par les navigateurs ; celles de l'avant et de l'arrière se remplissent à volonté d'air ou d'eau, par les manœuvres de ces mêmes navigateurs, suivant le poids qu'ils veulent donner au nautile, afin qu'il puisse flotter à la surface du fluide, ou s'y enfoncer si l'on veut.

Pour imprimer au vaisseau un mouvement progressif, on emploie deux rangs de rames à porte, que font mouvoir ceux qui sont dans l'intérieur. Ces rames passent au travers des flancs du nautile; mais les ouvertures sont masquées par des poches de cuir qui empêchent absolument l'eau d'y pénétrer; et si l'une d'elles venoit par hasard à crever, la rame est taillée de manière à faire elle-même, aussitôt, l'effet d'un tampon, en la tirant seulement à soi. Dans le nautile il n'y avoit que quatre rameurs, et il faisoit une demi-lieue par heure; mais il est aisé de multiplier le nombre de ces rameurs.

Pour diriger la machine et la faire virer de bord, on emploie un gouvernail placé à la poupe, comme dans les vaisseaux ordinaires, et qui se manœuvre du dedans par une corde; de plus, les navigateurs s'orientent à l'aide d'une boussole.

Pour monter ou descendre, ils emploient quatre ailes ou espèces de nageoires attachées deux à droite, et deux à gauche du nautile, et qu'un homme seul fait mouvoir par des tringles. On les incline de l'avant à l'arrière ou de l'arrière à l'avant, suivant qu'on veut ou monter ou descendre, parce qu'alors la résistance de l'eau occasionnée par le mouvement progressif agit sur ces plans inclinés conformément au but qu'on se propose.

Enfin, on se procure du jour au moyen d'une ou plusieurs glaces très-épaisses; mais comme l'obscurité devient très-grande à une certaine profondeur, les auteurs proposent de recueillir ce qui reste de rayons par de fortes loupes, qui pourront au moins leur faire distinguer ce qui se trouve près d'eux.

Pour vaincre la plus grande difficulté, celle de se procurer les moyens de respirer, on pratique des ouvertures ou petites écoutilles dans les douves supérieures du nautile. Par le moyen de ces ouvertures, en venant de temps en temps à la surface de l'eau, on renouvelle l'air du nautile, par une circulation qui s'établit alors facilement, soit par le ventilateur, soit, lorsque cela sera praticable, par des lampes qui, placées à quelques-unes de ces ouvertures, et correspondant jusqu'au fond du vaisseau par des tuyaux qui font l'effet de petites cheminées, en extraient l'air vicié, comme les réchauds placés au haut de l'ouverture d'une mine font circuler rapidement l'air jusqu'à sa plus grande profondeur.

Au surplus, il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire que ce renouvellement d'air dans le nautile soit fréquent; car dans les nombreuses expériences faites au Hâvre, les navigateurs sont restés plus d'une heure de suite sans aucune communication avec l'air extérieur et sans éprouver aucun mal-aise.

Mais c'est ici que la chimie vient efficacement au secours de la mécanique; car à défaut de tous les autres moyens, les navigateurs pourvoient au besoin impérieux de respirer, par une ample provision d'oxigène comprimé, qu'ils tiennent en réserve, et dont ils font usage avec l'économie que leur commande l'intérêt de leur propre conservation.

MM. Montagnès-la-Rogue, capitaine de vaisseau commandant le port du Hâvre, et Grehan, ingénieur-constructeur en chef de la marine, qui ont été témoins des expériences faites avec le nautile, en ont rendu un témoignage avantageux, et ils pensent qu'on pourroit faire des vaisseaux de ce genre beaucoup plus grands. Parmi les coopérateurs des expériences faites au Hâvre, sont M. Colin, actuellement préparateur de chimie à l'Ecole Polytechnique, et M. Muller, aide-de-camp du général d'Hastrel. M. Ransonnet, commandant le brick l'*Alcyon*, servoit de pilote dans le nautile.

§. III.

ANNONCES D'OUVRAGES.

Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet Etablissement. Dixième cahier, 1 vol. in-4°.

Ce cahier contient : 1°. la solution de plusieurs problêmes de géométrie, par M. *Branchon*; 2°. un mémoire sur les polygones et sur les polyèdres, par M. *Poinsot*; 3°. deux mémoires d'hydrographie, par MM. *de Prony* et *de Humbold*; 4°. les programmes du cours de grammaire et belles-lettres, par M. *Andrieux*.

Recherches Physico-Chimiques, *faites à l'occasion de la grande Batterie Voltaïque, donnée par S. M. à l'Ecole Polytechnique*, 2 vol. in-8°. avec six planches. *Par MM.* Gay-Lussac et Thenard, Instituteurs de Chimie à l'Ecole Polytechnique.

Cet ouvrage est terminé par un rapport fait au nom d'une commission de l'Institut, composée de MM. Laplace, Monge, Chaptal, Haüy et Berthollet. Le rapporteur, M. Berthollet,

après avoir fait mention des brillantes découvertes de M. Davy, chimiste anglais, a donné l'analyse du travail de MM. Gay-Lussac et Thénard, commencé en mars 1808, époque à laquelle ils ont obtenu, par un procédé de leur invention, le nouveau *Métal* (le potassium), qui a été l'agent principal de leurs découvertes. En lisant le précis de M. Berthollet, on se convaincra que ce nouvel ouvrage contribuera autant aux progrès de la chimie, que le traité du célèbre Lavoisier sur cette science. (*Voyez la Correspondance*, pag. 445 — 453 du premier volume, et pag. 28 du 1^er^ cahier, pag. 109 du 2^e^. cahier du second volume.)

De la Défense des places fortes, ouvrage composé par ordre de S. M. I. et R., pour l'instruction des Elèves du Corps du Génie. Par M. CARNOT. Seconde édition; Paris 1811.

Cette nouvelle édition contient un Mémoire additionnel fort intéressant, sur les améliorations dont l'art défensif est susceptible.

M. Carnot jugeant que la meilleure des armes pour la défense rapprochée, est la grenade, a imaginé un nouveau moyen de la lancer. Il a fait monter sur un petit mortier à grenade une platine de fusil d'infanterie, et une espèce de fût avec un crochet qui empêche le recul, de manière qu'un homme peut très-aisément charger un petit mortier, le pointer et le tirer seul comme un mousquet. Cette arme porte fort loin : l'essai en a été fait au Champ-de-Mars. Avec une simple cartouche ordinaire de fusil, elle porte la grenade jusqu'à trois cents pas, passant par-dessus les arbres.

Un autre Mémoire additionnel contient diverses données et plusieurs résultats d'expériences nécessaires pour la direction et l'exécution des travaux relatifs à la guerre offensive et défensive. Ce Mémoire sera très-utile aux militaires de toute arme.

Traité élémentaire des Machines, suivi d'un Rapport de M. Carnot, membre de l'Institut; 1 vol. in-4°., 28 pl. in-fol. par M. HACHETTE, *Instituteur de l'Ecole Polytechnique*; ouvrage dédié à M. le sénateur Monge.

Projet d'Hôpital pour quinze cents Malades. Par M. ROHAULT, *ancien Elève de l'Ecole Polytechnique*.

Depuis long-temps on fait des vœux pour que l'Hôtel-Dieu de Paris soit remplacé par un hospice plus vaste et mieux situé. Le projet de M. Rohault a déjà obtenu les suffrages des ingénieurs et des architectes les plus éclairés.

Thèse de Mécanique (la première qui ait été soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris), par M. BOURDON, *ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Docteur-ès-Sciences, et Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne.* Brochure in-4°. ; avril 1811.

Cette thèse, que M. Bourdon a dédiée à son ami et ancien condisciple S. D. Poisson, est divisée en deux parties ; dans la première, il a exposé la théorie des axes principaux des corps solides, par une méthode semblable à celle qu'il a suivie pour la détermination des axes principaux d'une surface du second degré (*voyez* pag. 189) ; la seconde partie renferme la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Considérations générales sur l'application de la Chimie aux diverses branches de la Médecine.

Tel est le titre d'une Thèse présentée et soutenue à la Faculté de Médecine de Paris, le 18 avril 1811, par M. A. J. DE LENS, de Paris, Docteur en Médecine.

Cet ouvrage est divisé en sept articles, qui comprennent les applications de la Chimie à l'*Art de l'Anatomiste*, à la *Physiologie*, à l'*Hygiène*, à la *Pathologie*, à la *Pharmacie*, à la *Matière médicale*, à la *Thérapeutique*, à la *Médecine légale* et à la *Médecine pratique* : chacun de ces articles offre des subdivisions relatives au sujet qui y est traité.

L'auteur de cette Thèse, dont le père jouit de l'estime due à de longs et utiles services dans l'administration de l'Ecole Polytechnique, a fait ses premières études de chimie dans cette école ; M. Guyton-Morveau, à qui l'on doit l'heureuse application de la chimie à la désinfection de l'air, a adressé au père de ce jeune médecin des complimens sur le jugement et l'érudition qu'il a remarqués dans cette première production de son fils, et sur la manière brillante avec laquelle il débute dans la carrière.

§. IV.

PERSONNEL.

Nomination à des places dans l'Ecole.

M. Morlet (Marie-Pierre-Hippolyte), capitaine du génie, ex-élève de l'Ecole Polytechnique, a été nommé par S. Ex. le

Ministre de la Guerre, à l'une des places de sous-inspecteur des études.

M. Petit (Alexis-Thérèse), ex-élève, a été nommé répétiteur de physique.

M. Janot Destainville, ex-élève, a été nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse, à la place de M. Petit.

M. Demarteau (Jacques-Antoine), ex-élève, a été nommé répétiteur adjoint à la place de M. Boucharlat, nommé professeur de mathématiques au Prytanée militaire de la Flèche.

MM. Collin et Cluzel ont été nommés répétiteurs de chimie; le premier en remplacement de M. Gay-Lussac, nommé instituteur; et le deuxième en remplacement de M. Drappier, démissionnaire.

Les membres du Conseil d'Instruction de l'Ecole Polytechnique, employés dans l'Université Impériale, sont :

MM. Legendre, conseiller-titulaire;
Ampère, inspecteur-général;
Lacroix, *doyen*, Professeur de la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris;
Poisson, ... *idem*;
Thénard, ... *idem*;
Gay-Lussac, ... *idem*;
Hachette, ... *idem*, adjoint.

Tous les professeurs de la Faculté des Sciences de l'Académie, chargés de l'enseignement des Mathématiques, c'est-à-dire de l'analyse, de la mécanique, et de l'astronomie, sont, à l'exception du doyen (M. Lacroix), anciens élèves de l'Ecole Polytechnique. MM. Biot et Dinet enseignent l'astronomie; M. Francœur est professeur d'algèbre.

M. Poinsot, qui remplace M. Labey comme instituteur d'analyse à l'Ecole Polytechnique, est inspecteur-général de l'Université.

M. Petit, répétiteur de physique à l'Ecole Polytechnique, est chargé provisoirement du cours de physique du Lycée Bonaparte. (*Arrêté de S. Exc. le Grand-Maître de l'Université*, du 6 *octobre* 1810.)

Promotions des anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs.

ARTILLERIE.

Un colonel, M. Berge.

Six lieutenans-colonels, MM. Demay. —Husson.—Capelle. — Boussaroque. — Renaud. — Bernard (L. M.).

GÉNIE.

Un colonel, M. Valazé.

Un major, M. Malus.

Vingt-deux lieutenans-colonels, MM. Richaud.— Bernard (Simon). — Goll. — Prevost - Vernois. — Delaage. — Legentil.—Lafaille.—Rohault (Fleury.)—Lamy.— Constantin. — Thuilier. — Beaulieu. — Daullé. — Bodson. — Bouchard. — Cossigny. — Burel. — Moret. — Treussart. — Vincent. — Guilley (Amédée). — Andoueaud.

PONTS-ET-CHAUSSÉES.

Treize ingénieurs en chef, MM. Lamandé. — Brisson. — Saint-Genis. — Fevre (J.-B.-Simon). — Garella. — Cavenne. — Eudel. — Gorse. — Grebert. — Jousselin. — Mesnager. — — Raffeneau. — Vauvilliers.

MINES.

Un ingénieur-divisionnaire, M. Héron-de-Villefosse.

Un ingénieur en chef de première classe, M. Brochant de Villiers.

Trois ingénieurs en chef de deuxième classe; MM. Gallois. — Calmelet. — De Bonnard.

Prix biennal accordé à l'auteur de la découverte la plus importante sur la lumière ou sur la chaleur.

La Société royale de Londres a, dans sa séance du 22 mars 1811, décerné ce prix à M. Malus (*).

(*) Voyez la *Théorie de la double réfraction de la Lumière dans les substances cristallisées*, Mémoire couronné par l'Institut dans la séance publique du 2 janvier 1810. M. Malus a, dans ce Mémoire, confirmé la loi d'Huygens sur la double réfraction de la lumière, en faisant voir l'accord parfait de cette loi avec les phénomènes déjà connus, et avec un grand nombre d'autres qu'il a lui-même observés, et principalement avec ceux qui dépendoient de la réflexion de la lumière par les surfaces inférieures des cristaux diaphanes à double réfraction.

Distribution des Prix faite par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur, M. le Comte de Montalivet, à MM. les Elèves de l'Ecole Impériale des Ponts-et-Chaussées, le 18 avril 1811.

CONCOURS DE 1809.

Projet de route...	1er. Prix.......	M. Pellegrini.
	2e. Prix.......	M. Manetti.
Pont mobile....	1er. Prix.......	M. Brémontier.
Pont en pierre................		
Projet de navigation..........	Deux 1ers Prix..	MM. Spinasse, Emmery.
	Deux 2es Prix...	MM. Leblanc, Girault.
Ecluse à sas....	1er. Prix........	M. Jousselin.
	2e. Prix........	M. Poirée.
Projet d'arsenal maritime....	1er. Prix.......	M. Mordret.
	2e. Prix.......	M. Méquin.
Projet de préfecture.........	1er. Prix.......	M. Silguy.
	2e. Prix........	M. François.
Maison de campagne.......	2e. Prix	M. Pellegrini.

CONCOURS DE 1810.

Dessin de la Carte............		
Projet de route ..	1er. Prix.......	M. Duleau.
	2e. Prix........	M. Vinard.
Coupe des Pierres	2e. Prix......	M. Journet.
Pont en pierre...	1er. Prix	M. Jousselin.
	2e. Prix......	M. Letocart.
Barrage à la mer..	1er. Prix	M. François.
	2e. Prix......	M. Girault.
Projet de château d'eau......	1er. Prix.....	M. Letexier.
	2e. Prix.	M. Melville.
Bains publics. ..	1er. Prix	M. Letocart.
	2e. Prix.	M. Pellegrini.
Maison de campagne......	2e. Prix.	M. Fresnel.

Concours de 1811.

Mécanique appliquée.	1er. Prix.	M. Bélanger.
	2^{e}. Prix.	M. Coriolis.
Dessin de la carte.		
Projet de route. . .	1er. Prix.	M. Guillebon.
	2^{e}. Prix.	M. Moneuze.
Projet de pont en charpente.	1er. Prix.	M. Journet.
	2^{e}. Prix.	M. Grandin.
Projet de navigation	1er. Prix.	M. Duleau.
	2^{e}. Prix.	M. Lemasson.
Projet d'église. . .	1er. Prix.	M. Viollet.
	2^{e}. Prix.	M. Journet.
Ecole de Marine. .	1er. Prix.	M. Duleau.
	2^{e}. Prix.	M. Kermel.
Maison de campagne	1er. Prix.	M. Gensolen.
	2^{e}. Prix.	M. Hurel.

Conseil de perfectionnement.

La onzième session du conseil de perfectionnement a été ouverte le 26 octobre 1810, et a été terminée le

Liste des membres du conseil.

Gouverneur de l'Ecole, Président.

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics ; membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Vauquelin, Malus.

Membres de l'Institut national pris, selon la loi, dans la classe des sciences physiques et mathématiques.

MM. les comtes Laplace, Lagrange, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre.

MM. Cotti, officier supérieur d'artillerie; Allent, officier supérieur du Génie; Bonne, officier supérieur du génie-géographe; Champy père, administrateur général des poudres et salpêtres.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine.

M. Sugny, inspecteur-général d'artillerie de marine; M. Sané, inspecteur-général du génie maritime.

Nota. M. Sugny n'étant pas à Paris, a été remplacé par M. le général Thirion, inspecteur-adjoint d'artillerie de marine.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur.

MM. Bruyère, inspecteur-général des ponts et chaussées; Lelièvre, inspecteur-général des mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique.

M. le baron de Vernon.

Commissaires choisis par le Conseil d'Instruction de l'Ecole, parmi ses membres.

MM. Monge, Hachette, Gay-Lussac, Durand.

Secrétaire du Conseil.

M. Marielle, *Capitaine, Quartier-Maître de l'Ecole Polytechnique.*

Concours de 1810.

Examinateurs d'admission à l'Ecole Polytechnique.

Paris.	M. Reynaud;
Tournée du Sud-Ouest	M. Francœur;
Tournée du Nord-Est	M. Dinet;
Tournée du Sud-Est	M. Labey.

Les examens ont été ouverts le 1er août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission de l'Ecole impériale Polytechnique a prononcé le 25 septembre 1810, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

Trois cent soixante-trois candidats ont été examinés;

SAVOIR:

A Paris........................	159	363.
Dans les Départemens.............	204	

Sur ce nombre, 227 ont été jugés admissibles,

SAVOIR:

de l'examen de Paris............	95	227.
des départemens................	132	

Douze candidats ont été mis hors de concours, comme n'ayant pas satisfait aux conditions du programme, relatives aux connoissances exigées dans les langues française et latine; douze autres, parce qu'ils n'étoient pas assez exercés au dessin; en outre dix candidats ont été reculés de plusieurs rangs sur les listes, par ordre de mérite en raison du premier motif, et trois en raison du deuxième.

Un candidat a été écarté du concours pour s'être présenté à deux examinateurs.

Le nombre des candidats admis par le Jury a été de 167,

SAVOIR:

de Paris....................	85	167.
des départemens.............	82	

Nombre des élèves admis à l'Ecole jusqu'au 1er novembre 1809.............................. 2306.

Total des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement.................................. 2473.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 167 *candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury du* 25 *septembre* 1810.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Alauze.	Jacques.	Bordeaux.	Gironde.
Balaran.	Louis-Constans.	Castres.	Tarn.
Barbier.	Joseph-Odille.	Besançon.	Doubs.
Bayard.	Ferdinand-Jean.	Philadelphie.	en Amérique.
Belmas.	Jacques-Vital.	Paris.	Seine.
Berdolle.	Antoine-Théodore.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Berjaud.	Jean-Baptiste.	Paris.	Seine.
Bertin.	Achille.	Fumay.	Ardennes.
Billaudel.	Jean-Baptiste-Basilide.	Rethel	Ardennes.
Blanc.	Antoine.	Saint-Geniés-le-Bas.	Hérault.
Blevec.	Bertrand-Hercule.	Port-Louis.	Isle-de-France.
Bompard.	Jean.	Bardonuêche.	Pô.
Bottex.	Auguste-Rodolphe.	Neuville sur Ain	Ain.
Boucquel-Beauval.	Léop.-Stan.-Emmanuel.	Tournai.	Jemmape.
Bouvet.	Jean-Victor.	Lorient.	Morbihan.
Brongniart.	Nicolas-Joseph.	Lillers.	Pas-de-Calais.
Bruno.	Pierre-Armand.	Grenoble.	Isère.
Bryon.	Pierre-Franç.-Alexandr.	Salins.	Jura.
Cabrol.	François-Gracchus.	Rodez.	Aveyron.
Caffort.	Joseph-Just.	Narbonne.	Aude.
Cartier.	François.	Paris.	Seine.
Castaing.	Ferdinand-Louis.	Alençon.	Orne.
Chaillou.	Alexandre-Hippolyte.	Paris	Seine.
Chaillou.	Réné-Pierre.	Haute-Goulaine	Loire-Infér.
Charreyron.	Joseph.	Bellac.	Haute-Vienne.
Chauvet.	Pierre.	Sainte-Pience.	Manche.
Chiodo.	Augustin-Jérôme.	Savone.	Montenotte.
Cohendet.	Adrien-Joseph.	Paris.	Seine.
Collas-Courval.	Léon-Jean.	Argentan.	Orne.
Colomb.	Paul-François-Marie.	Saint-Claude.	Jura.

NOMS	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Corrard.	Alexandre-César.	Méry-sur-Seine	Aube.
Coste.	Louis-Alexis.	Salins.	Jura.
Coueffin.	Pierre-Raphaël-Denis.	Caen.	Calvados.
Coursin.	Jean-Baptiste-Felicité.	Paris.	Seine.
Dechauvenet.	Louis-Philippe-Henri.	Saint-Quentin.	Aisne.
De Grave.	Ursule-Jos.-Hip.-Casim.	Pezenas.	Hérault.
Delaborde.	Alexandre-Victor.	Paris.	Seine.
Desfeux.	Charles-Amable-Louis.	Paris.	Seine.
Despine.	Charles-Marie-Joseph.	Annecy.	Mont-Blanc.
Dessalle	François-Clet-Achille.	Paris.	Seine.
Dieudé.	Alexand.-Louis-Xavier.	Charleville.	Ardennes.
Donnat.	Franç.-Xavier-Eugène.	Hagueneau.	Bas-Rhin.
Doucet.	Guillaume.	Tours.	Indre-et-Loire.
Douet.	Prosper.	Tours.	Indre-et-Loire.
Dumas.	Jean-Baptiste-Louis.	Pierre-Buffière.	Haute-Vienne.
Dumay.	Fidèle-Joseph.	Napoléonville.	Morbihan.
Duplan.	Joseph.	Paris.	Seine.
Durand	Constant-Hip.-Augustin.	Saint-Lô.	Manche.
Fabian.	Jean-Pierre.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Fabre.	Jean-Franç.-Guillaume.	Albi.	Tarn.
Falret.	Philippe-François.	Larnagol.	Lot.
Fiévée.	Adolphe-Joseph-Simon.	Paris.	Seine.
Forget de Barst.	Charl.-Gabr.-Ferdinand.	Longwy.	Moselle.
Fourmond.	Joseph-Franç.-Emilien.	Isle-de-France.	
Gaide.	Anne-François.	Wassy.	Haute-Marne.
Galis.	Antoine-Jean.	Paris.	Seine.
Gauthier.	Claude-François.	Vitreux.	Jura.
Gazan.	Alex.-Zach.-Alexis-Nic.	Antibes.	Var.
Gazeau de la Bouère.	Amand-Henri-Jacques-Charles.	Jallais.	Maine-et-Loire.
Gérard.	Jean-Baptiste-Antoine.	Velaine en Haye	Meurthe.
Girard.	Scœvola-Charles.	Douai.	Nord.
Giret.	Jean-Charles-Louis.	Séez.	Orne.
Godard de Rivocet.	Auguste-François.	Soissons.	Aisne.
Godin.	Jean-Alexis.	Poligny.	Jura.
Gohard.	Nicolas-Joseph.	Versailles.	Seine-et-Oise.
Gosselin.	François-Théodore.	Rouen.	Seine-Infér.
Grégoire.	Joseph-Marie.	Marseille.	B.-du-Rhône.
Grillet-Serry.	Etienne-Germain.	Auxerre.	Yonne.
Grimouville.	Théodore-Benjamin.	Cardonville.	Calvados.
Guilhou.	François-Charles.	Bordeaux.	Gironde.
Guilland.	François-Huningue.	Belley.	Ain.
Guillemot.	Charl.-Aimé-Jean-Bapt.	Oisy.	Pas-de-Calais.
Guy.	Jean-Pierre-Anselme.	Agde.	Hérault.
Guy.	Antoine-Marie.	Loyettes.	Ain.
Guyot-Vercia.	Louis-Marie-Désiré.	Morteau.	Doubs.

NOMS	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Harmand.	Adrien-Molière-Pline.	Nemours.	Seine-et-Marne
Hébert.	Philippe-Julien.	Toulouse.	Haute-Garonne
Hennebert.	Nicolas-François.	Paris.	Seine.
Hubert.	Charles-Clair.	Saint-Quentin.	Manche.
Imbert-S.-Brice	Marie-Théodore-Penn.	Chassaigne.	Haute-Loire.
Jacquiné.	Pierre-Séraphin.	Rambervillers.	Vosges.
Jarrige - Lamazorie.	Joseph-Marie.	Tulle.	Corrèze.
Karth	Auguste-Frédéric.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Labarbe.	Jean-Marcellin.	Cazaubon.	Gers.
Lacave.	Louis-Henri-Hippolyte.	Paris.	Seine.
Lagarrigue.	Alexandre.	Lacabarède.	Tarn.
Lambert.	César-Joseph.	Toulon.	Var.
Lambert.	Charles-Joseph-Emile.	Bruchsal.	Gr.-D. de Bade.
Larabit	Marie-Denis.	Roye.	Somme.
Larchevêque-Thibaud.	Jean-Baptiste.	Cap-Français.	Isle S.-Doming.
Laugaudin.	Jean-Antoine.	Villeneuve-sur-Vanne.	Yonne.
Lebon - d'Haubersin.	Henri-Hippolyte.	Paris.	Seine.
Lecarpentier.	Bruno.	Honfleur.	Calvados.
Ledenmat-Kervern.	Eugène-Marie-Hippolyte	Morlaix.	Finistère.
Lefebvre.	Charles-Emmanuel.	Turetot.	Seine-Infér.
Lefebvre.	Auguste-Jean-Marie.	Rheims.	Marne.
Lefebvre - de-Sallay.	Pierre-Henri.	le Mans.	Sarthe.
Lejeune.	Marie-Remi-César.	Châlons.	Marne.
Lemarcis.	Jean-Marin.	Lheure.	Seine-Infér.
Lemit.	Louis.	Paris.	Seine.
Lenfumé.	Alphonse.	Troyes.	Aube.
Lerebours.	Jacques-Félix.	Saint-Hilaire du Harcourt.	Manche.
Lermier.	Jacques-Constant.	Arçonnay.	Sarthe.
Leroy.	Jean-Denis.	Paris.	Seine.
Lherbette.	Adolphe-Charles.	Paris.	Seine.
Liadières.	Pierre-Chaumont.	Pau.	Basses-Pyrén.
Lindenmeyer.	Jean-Frédéric-Charles.	Grumbach.	Sarre.
Loret.	Louis-Marie-Constant.	Morlaix.	Finistère.
Luguet.	Achille-Antoine-Martin.	Compreignac.	Haute-Vienne.
Madelaine.	Joachim.	Evian.	Léman.
Mahieux.	Jean.	Bruxelles.	Dyle.
Malechard.	Charl.-Bernardin-Gabr.	Ste-Foi-lès-Lyon	Rhône.
Marcilhac.	Adolphe-Charl.-Martin.	Paris.	Seine.
Martin - Julvécourt.	Alexandre.	Nancy.	Meurthe.
Marty.	Joseph.	Noueilles.	Haute-Garonne
Melon de Pradou	Jean-Baptiste.	Tulle.	Corrèze.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Mercier.	Charles.	Arbois.	Jura.
Metayer.	Julien-Fidèle-Constant.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Michel-d'Anserville.	Ange-Gabriel-Porphire.	Anserville.	Oise.
Michelot.	Jean-Charles-Auguste.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Mieussens.	Roch.	Vic-sur-Losse.	Gers.
Mocquard.	Aimé.	Lannilis.	Finistère.
Monmartin.	Alexand.-Pierre-Franç.-Barthelemi.	Cailloux-sur-Fontaine.	Rhône.
Moreau.	Marie-Emiland-Bonav.-Auguste.	Louhans.	Saône-et-Loire.
Morin.	Nicolas.	Rouen.	Seine-Infér.
Moynier.	François-Joseph-Jean.	Ille.	Pyrén.-Orient.
Murat.	(N'a pas de prénoms.)	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Muthuon.	Louis-Marie.	Largentière.	Hautes-Alpes.
Néhou.	Adrien.	Andelys.	Eure.
Nether.	Charles-Marie.	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Ogée.	Félix-François.	Nantes.	Loire-Infér.
Olivier.	Albert-Joseph-Augustin.	Carpentras.	Vaucluse.
Patau.	George-François-Marc.	Vinça.	Pyrén.-Orient.
Pauzié-Banne.	J.-Henri-Pierre-Auguste	Montpellier.	Hérault.
Peloux.	Jean-Baptiste-Melchior.	Cuet-Montrevel	Ain.
Pérignon.	François-Fortuné.	Paris.	Seine.
Perreau.	Jules-Edme-Charles.	Paris.	Seine.
Perruchot.	Louis.	Dijon.	Côte-d'Or.
Planquette.	Jean-Louis.-Et.-Franç.	Cemi en Singlais	Calvados.
Rabaioye.	Pierre-Charles.	Paris.	Seine.
Redoutey.	André-Remi-Egalité.	Auxonne.	Côte-d'Or.
Rieffel (*).	François Xavier-Joseph.	Mayence.	Mont-Tonnerre.
Robert de Saint-Vincent.	Pierre-Gustave-Léopold	Leuze.	Jemmape.
Rocquancourt.	Jean-Thomas.	Saint-Vaast.	Calvados.
Ronmy.	Thomas-Ferdinand.	Rouen.	Seine-Infér.
Roullion.	Claude-Joseph.	Bernin.	Isère.
Rousset.	Charles.	Lyon.	Rhône.
Rouvrois.	François-Gabriel.	Saint-Mihiel.	Meuse.
Séhols.	Charles-Stanislas.	Keskastel.	Bas-Rhin.
Sibilet.	Pierre-Abel.	Larochefoucauld	Charente.
Simon.	Joseph.	Meslay.	Mayenne.
Soleirol.	Henri-Augustin.	Verdun.	Meuse.
Sorel.	Pierre-Louis-Honoré,	Le Hâvre.	Seine-Infér.
Surineau.	Louis-Charles-Théodore.	Luçon.	Vendée.

(*) Cet élève étant myope, a été reçu seulement comme pensionnaire, mais ne pourra concourir pour les services publics.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Tassain.	Nicolas.	Sarlat.	Dordogne.
Terson Paleville	Daniel-Casimir.	Paleville - Lastouzeilles.	Tarn.
Thiery.	Sébastien.	Verdun.	Meuse.
Thiry.	François-Augustin.	Nancy.	Meurthe.
Urtin.	César-Ernest.	Valence.	Drôme.
Vauquelin.	Jean-François.	Paris.	Seine.
Vergnaud.	Amand-Denis.	Orléans.	Loiret.
Vernety.	Etienne.	Saint-Germain-en-Laye.	Seine-et-Oise.
Vieux.	Pierre	Ste.-Menehould	Marne.
Viquesnel.	François-Etienne-Gilles.	Paris.	Seine.
Voysin - Gartempe.	Philippe-Aristide.	Gueret.	Creuse.
Ythier.	Pierre-Marie-Thomas.	Auxerre.	Yonne.
Yver.	César-Jules.	Tonnerre.	Yonne.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Le jury présidé par S. Exc. M. le Gouverneur, et composé des deux examinateurs permanens MM. Legendre et Lacroix, et des deux examinateurs temporaires MM. Vauquelin et Malus, a arrêté, le 28 septembre 1810, les listes suivantes, par ordre de mérite; savoir :

Artillerie de terre. MM. Gazel, Réguis, Bachelay, Perreyve, Thiry, Delafuye, Franchessin, Lecourroyer, Olry, Gravelle, Jacquin, Floquet, Lecorbeiller, Lemasson, Asselin de Crèvecœur, Decayeu, Duffourc, Morlot, Goupil, Delavenne, Serres, Hercouet, Bonie, Tournaire, Caqueray-Fontenelle, Boistel-Duroyer, Pargoire, Soufflot, Froussard, Munier, Soulier, Delatire-d'Aubigny, Cartier, Surineau, Paqueron, Parès, Goussard, Durfort-Léobard, Gambier, Comynet, Poilleux, Cerf-Berr, Emon, Cotte, Griffet-Labaume (C. A.), Dufrayer, Falguière, Daridan, Godin, Vatrin, Gardeur-Lebrun, Baudreuil, Guenyveau, Dutertre, Dupré, Louuel, Tardu, Pâquet, Oury, Lanteri, Labrosse-Luuyt, Moyne, Raige, Ethéart, Roy, Huguenot *dit Lalance*, Vincent, Labatie, Jolivet de Riencourt, Cabannes-Laprade,

Jacquemont, Vivier - Lachaise, Rolland - Garagnol, Lerouge (Felix), O-Farrel, Lenfant, Dehaussy, Dadole, Plivard.................................... 79.

Artillerie de mer. MM Aurioust-Beaujour, Devillers.. 2.

Génie militaire. MM. D'Artois, Paret, Noizet, Goureau, Perrot, Gilberton, Poupart, Boissière, Duché, Lesbros, Poncelet, Corrèze, Chiappe, Hubert, Collas, Rudler, Gourier, Vallenet, Jubié, Savart, Vène, Simon, Casse, Sers, Boquet, Mermier, Sertour, Harel, Tiron.................... 29.

Ponts et chaussées : MM. Josserand, Pouettre, Surville, Cuel, Le Rouge (P.-J.), Guillebon, Armand, Umpfenbach, Coriolis, Bélanger, Frimot, Dinet, Genieys, Courtois, Jouvin, Mary, Moneuze, Carbonazzi, Hurel, Noël, Bernard (H), Morin, Legraverend, Baudesson, Gensolen, Couturat, Demonet-Lamarck, Cousinery.................... 28.

Ingénieurs-géographes : MM. Mareuse, Vuillet, Filhon, Durand.................................... 4.

Mines: MM. Gargan, Burdin, Delseriès, Lefebvre (L.) 4.

Poudres et Salpêtres : MM. Desjardins, Lugaigne..... 2.

Troupes de ligne : M. Delafosse, nommé sous-lieutenant dans le 5e régiment d'infanterie de ligne.............. 1.

Démissionnaires : MM. Beck (C.), Delalande, Desages, D'Heure, D'Espagnac (*), Doucet, Dufilhol, Laroze, Merland, Peyret, Saladin, Saucourt.......................... 11.

Morts : MM. Ducasse, Laurenceot, Cauvet-Longrais.. 3.

Etat de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique à l'époque du 1er novembre 1810, et résultat des opérations des jurys d'admission dans les services publics, de passage de la 2e à la 1ere division, et d'admission à l'Ecole.

L'Ecole étoit composée, au 1er novembre 1809, de 333 élèves,

SAVOIR :

1ere division..............	156	333.
2e division..............	177	

(*) Nommé auditeur au Conseil-d'Etat.

Elle a perdu dans le cours de l'année

morts	1ere division	2	3	163
	2e division	1		
démissionnaires	1ere division	3	11	
	2e division	8		
Passé dans la ligne sous-lieutenant			1	

Admis dans les services publics.

Artillerie de terre	79	
Artillerie de mer	2	
Génie militaire	29	
Ponts et Chaussées	28	
Ingénieurs-géographes	4	
Mines	4	
Poudres et Salpêtres	2	

A la fin de l'année scholaire l'Ecole restoit composée de 170 élèves,

SAVOIR :

1ere division	2	170.
2e division	168	

Le Jury a pensé que, sur les 170 élèves qui composoient la 2e division, 157 étoient susceptibles de passer à la 1ere, et que 11 devoient faire une seconde année dans cette division. Il en résulte que la nouvelle 1ere division s'est trouvée composée de 159 élèves.

Ajoutant aux 170 élèves qui restent à l'Ecole les 167 qui ont été admis au concours de cette annee, ci...... 167.

L'école s'est trouvée composée, au 1er novembre, de 337 élèves,

SAVOIR :

1ere division	159	337.
2e division	178	

§. V.

ACTES DU GOUVERNEMENT.

Paris, le 27 juillet 1810.

Le général Gassendi, chef de la division de l'artillerie au ministère de la Guerre, à M. le comte de Cessac, gouverneur de l'Ecole impériale Polytechnique.

M. le Comte, — J'ai mis sous les yeux du ministre, ainsi que Votre Excellence l'a désiré, les observations contenues dans la lettre qu'Elle m'a fait l'honneur de m'écrire le 21 de ce mois. Son Excellence les ayant trouvées fondées, a arrêté, le 26 de ce mois :

1°. Qu'à l'avenir les élèves des Poudres et Salpêtres seront tirés de l'Ecole Polytechnique seule ;

2°. Qu'elle fournira, d'après les examens de cette année, auxquels l'un des administrateurs généraux des Poudres et Salpêtres assistera, ainsi qu'à ceux des années suivantes, les deux élèves dont leur administration a besoin, en prévenant toutefois les aspirans qu'ils devront justifier, avant l'examen, qu'ils sont en état de fournir le cautionnement à l'époque où il sera exigé d'eux, à défaut de quoi ils resteront commissaires-adjoints ;

3°. Qu'attendu que le concours public a été annoncé pour le 1er. août prochain, et qu'il peut y avoir des concurrens, autres que les élèves de l'Ecole Polytechnique, l'examen de ces candidats particuliers sera fait par M. Legendre, examinateur de l'artillerie, et qu'il en sera reçu un comme élève surnuméraire, s'il fait preuve des connoissances exigées.

Son Excellence me charge, M. le Comte, de vous faire part de ces dispositions, et de vous prévenir qu'il vient d'être écrit en conséquence à MM. les administrateurs généraux des Poudres et Salpêtres, et à M. Legendre.

J'ai l'honneur d'être, etc.

EXTRAIT *du décret impérial contenant Organisation du Corps impérial des Ingénieurs des Mines.*

Au palais des Tuileries, le 18 novembre 1810.

NAPOLÉON, EMPEREUR DES FRANÇAIS, etc.

TITRE Ier. — *Composition du Corps impérial des Ingénieurs des Mines.* — ART. 1er. Le corps impérial des ingénieurs des mines sera divisé en grades de la manière suivante : Inspecteurs-généraux, inspecteurs divisionnaires, ingénieurs en chef, ingénieurs ordinaires, aspirans, élèves. — Art. 2. Il y aura dès-à-présent trois inspecteurs généraux, cinq inspecteurs divisionnaires, quinze ingénieurs en chef, trente ingénieurs ordinaires, dix aspirans, vingt-cinq élèves. — Art. 3. Le nombre des ingénieurs en chef et ordinaires pourra être augmenté successivement et dans la proportion des besoins du service, sur le rapport de notre ministre de l'intérieur. — Art. 4. Les ingénieurs en chef, les ingénieurs ordinaires et les élèves seront divisés en deux classes. Deux cinquièmes appartiendront à la première classe, et trois cinquièmes à la seconde. — Art. 5. Lorsque le besoin du service exigera que des ingénieurs en chef de première classe, pour des cas spéciaux, aient sous leurs ordres un ou plusieurs ingénieurs en chef, ils prendront, pendant la durée de ces fonctions, le titre d'*ingénieurs en chef directeurs*. — Art. 6. A la première organisation, et pour cette fois seulement, notre ministre de l'intérieur pourra admettre quatre élèves,

pris dans les départemens réunis, sans qu'ils soient tenus de justifier de leur cours d'étude à l'Ecole Polytechnique. Toutefois ils subiront un examen devant les inspecteurs généraux des mines, et devront en obtenir un certificat de capacité — Art. 7. Les deux inspecteurs particuliers des carrières sous Paris, et l'ingénieur géomètre en chef employé aux travaux de ces carrières, seront considérés comme faisant partie du corps impérial des mines. Les grades leur seront assignés par notre ministre de l'intérieur. Ils continueront d'être payés par la ville de Paris. — Art. 8. A l'avenir, le remplacement de ces ingénieurs, ainsi que celui de l'inspecteur général des carrières, actuellement ingénieur en chef des mines, s'opérera par des individus du corps impérial des mines.

TITRE IV. — *Nomination et Avancement.* — Art. 49. Les Elèves des mines sont pris parmi ceux de l'Ecole Polytechnique qui auront complété leurs études et rempli les conditions exigées; le directeur général en proposera, et notre ministre de l'intérieur en déterminera le nombre chaque année. — Art. 50. Les places d'aspirans du corps des ingénieurs des mines seront données aux élèves de première classe, suivant le rang qu'ils auront aux écoles, en raison de leurs progrès et de leur application. — Art. 51. Lorsqu'il y aura lieu à une ou plusieurs nominations, le premier ou les premiers de la première classe seront choisis, sur la proposition du directeur général, par notre ministre de l'intérieur. — Art. 52. Les ingénieurs ordinaires sont pris parmi les aspirans : ils sont nommés par nous, sur le rapport du ministre et de l'avis du directeur général. Art. 53. Les ingénieurs en chef sont pris parmi les ingénieurs ordinaires de première classe, sans exclusion de la seconde : ils sont nommés par nous, sur le rapport du ministre et l'avis du directeur général. — Art. 54. La promotion d'une classe à l'autre, relativement aux ingénieurs en chef et ordinaires, est faite par notre ministre de l'intérieur, sur le rapport du directeur général. — Art. 55. Les inspecteurs divisionnaires seront pris parmi les ingénieurs en chef des deux classes, et nommés par nous, sur le rapport du ministre, d'après l'avis du directeur général. — Art. 56. Les inspecteurs généraux seront pris parmi les inspecteurs divisionnaires et les ingénieurs en chef de la première classe : ils seront nommés par nous, sur le rapport du ministre et sur l'indication du directeur général.

TITRE VI. §. II. — *Uniforme du Corps.* — Art 72. L'uniforme des ingénieurs des mines de tout grade sera le même que celui des ingénieurs de tout grade des ponts-et-chaussées, déterminé par notre décret du 7 fructidor an XII, sauf les exceptions ci-après : Le collet et les paremens de l'habit seront en velours bleu impérial. Les boutons auront pour légende : *Corps impérial des Mines ;* au centre, un aigle. Il leur est interdit de rien changer à l'uniforme prescrit pour chaque grade.

EXTRAIT *du Décret impérial contenant Organisation du Corps des Ingénieurs des Ponts-et-Chaussées.*

Au Quartier-général impérial du Pont-de-Briques, près Boulogne, le 7 fructidor an 12.

NAPOLÉON, EMPEREUR DES FRANÇAIS, etc.

TITRE Ier. — *Formation du Corps des Ingénieurs des Ponts-et-Chaussées.* — Art. 1er Le corps des ingénieurs des ponts-et-chaussées sera composé, à l'avenir, de cinq cent trente-sept individus, divisés en grades de la manière qui suit : 5 Inspecteurs généraux. — 15 Inspecteurs divisionnaires — 2 adjoints. — 134 Ingénieurs en chef. — 306 Ingénieurs ordinaires. — 15 Aspirans. — 60 Elèves.

Art. 2. Les cent trente-quatre ingénieurs en chef sont divisés en deux classes : quatre-vingt-neuf de première classe ; quarante-cinq de seconde classe.

Art. 3. Les trois cent six ingénieurs ordinaires seront divisés en deux classes : 139 de première classe ; 167 de seconde classe.

Art. 4. Lorsque des ingénieurs en chef de première classe se trouveront chargés de grands travaux de navigation, d'ouverture de routes, ou autres, qui mettront sous leurs ordres un ou plusieurs ingénieurs en chef, ils auront le titre d'*Ingénieurs directeurs* pendant la durée des travaux.

TITRE V. — Art. 22. L'uniforme des ingénieurs des ponts-et-chaussées sera : habit français, de drap bleu national, doublé de même, boutonné sur la poitrine, et dégagé sur les cuisses. Un seul rang de boutons sur le côté droit de l'habit ; poches en travers et à trois pointes avec trois boutons, un bouton à la naissance des plis, et deux dans la longueur ; collet renversé, de drap cramoisi, monté sur un collet droit, de huit centimètres de hauteur. La manche de l'habit coupée au-dessous, avec paremens de drap cramoisi, garni de trois petits boutons. Veste chamois, boutonnée par douze petits boutons ; culotte bleue. Boutons surdorés avec un fond uni. Autour du bouton les mots : *Ingénieurs des Ponts-et-Chaussées*. Chapeau uni à la française, avec ganse en or pareille à la baguette à fleurons, la ganse arrêtée par un petit bouton ; la cocarde, et une arme. — Art. 23. Les grades seront distingués par une broderie en or, formée d'une branche d'olivier, enroulée d'un ruban et portée par une simple baguette, ayant ensemble une largeur de trente-cinq millimètres.

TITRE VI. — *Nomination et Avancement*. — Art. 24. Les soixante élèves des Ponts-et-Chaussées sont pris parmi ceux de l'École Polytechnique qui, ayant complété leurs études et rempli les conditions exigées par les réglemens des deux écoles, auront été choisis par l'administration de l'École Polytechnique. Art. 25. Les quinze places d'aspirans des Ponts-et-Chaussées seront données aux élèves de la première classe, dans l'ordre de la primauté de leurs degrés. Lorsqu'il y aura lieu à une ou plusieurs nominations, le premier ou les premiers de la première classe seront, à cet effet, désignés par le directeur de l'école, au directeur-général, qui les nommera ou qui décidera si des raisons de convenance de service n'exigent pas une exception. Le directeur-général déterminera leur destination, et leur donnera une commission sous l'approbation du ministre de l'intérieur. — Art. 26. Les ingénieurs ordinaires sont pris parmi les aspirans ; ils sont nommés par l'Empereur, sur l'indication du directeur-général, et sur le rapport du ministre de l'intérieur. — Art. 27. Les ingénieurs en chef sont pris parmi les ingénieurs ordinaires de première classe, sans exclusion de la seconde ; ils sont nommés par l'Empereur, sur l'indication du directeur général et sur le rapport du ministre de l'intérieur. — Art. 28. La promotion d'une classe à l'autre, relativement aux ingénieurs ordinaires et aux ingénieurs en chef, s'exécute par le ministre de l'intérieur, sur le rapport du directeur-général. — Art. 29. Les inspecteurs divisionnaires seront pris parmi les ingénieurs en chef de première classe, sans exclusion de la seconde ; ils seront nommés par S. M. l'Empereur, sur l'indication du directeur-général et sur le rapport du ministre de l'intérieur. — Art. 30. Les inspecteurs-généraux sont pris parmi les inspecteurs divisionnaires et les ingénieurs en chef des deux classes ; ils seront nommés par S. M. l'Empereur, sur l'indication du directeur-général et sur le rapport du ministre de l'intérieur.

TITRE X. — *Ecole des Ponts-et-Chaussées* — Art. 59. L'école nationale et d'application des Ponts-et-Chaussées, établie en 1747, et réorganisée par la loi de 1791, sera dirigée par un inspecteur-général, sous la surveillance et administration du directeur-général des Ponts-et-Chaussées. — Art. 60. Les fonctions du directeur de l'école sont déterminées par le

présent réglement, et par le réglement spécial pour cette école. Il est en même temps garde des plans, projets et modèles servant à l'instruction des élèves. — Art. 61. Le directeur de l'école aura immédiatement sous lui un inspecteur ayant le grade d'ingénieur en chef. — Art. 62. Le directeur de l'école, l'inspecteur, les trois professeurs, et deux inspecteurs-généraux qui seront désignés, formeront le conseil de l'école, présidé par le directeur-général des Ponts-et-Chaussées, et, en l'absence, par le directeur de l'école. Dans ce conseil, qui se réunira au moins une fois par mois, se traiteront toutes les affaires relatives à la discipline et à l'administration de l'école, à l'instruction et au personnel des élèves. Ses délibérations seront soumises à l'approbation du directeur-général. — Art. 63. Le nombre des élèves des Ponts-et-Chaussées tirés de l'Ecole Polytechnique conformément à la loi du 30 vendémiaire an 4, est fixé à soixante, divisés en trois classes de 20 chacune. — Art. 64. Chaque élève recevra un traitement annuel, réglé ainsi qu'il suit:

Ceux de première classe................	900 fr.
Ceux de deuxième classe................	800
Ceux de troisième classe................	700

— Art. 65. Les élèves pourront être envoyés en campagne dans le cours de floréal ou prairial de chaque année, et jamais avant cette époque. Ils recevront, dans ce cas, le traitement des aspirans, et ne seront pas portés sur les états d'émargement de l'école pendant tout le temps de leur absence. Les élèves ainsi envoyés au-dehors seront tenus d'être rentrés à l'école le 1er frimaire, jour fixé pour la reprise des cours et des exercices, à moins que des raisons majeures n'aient déterminé le directeur-général à approuver une plus longue absence. — Art. 66. Le mode d'enseignement, celui d'avancement dans chaque classe suivant l'ordre des degrés, et d'une classe à l'autre, et enfin la police intérieure de l'école, seront fixés par un réglement particulier. — Art. 67. L'élève qui, après trois ans d'école, n'aura pas fait le travail exigé, et donné des preuves d'aptitude nécessaires pour être reçu aspirant, cessera d'être compris sur le tableau : il en sera de même de ceux qui ne suivront pas avec exactitude les cours et les exercices, ou qui tiendront une conduite répréhensible. Ces exclusions auront lieu sur la décision du ministre de l'intérieur, après la délibération du conseil de l'école. — Art. 68. Les professeurs seront au nombre de trois. Le premier enseignera la stéréoto[mie] appliquée à la coupe des pierres et des bois, et la pratique des constru[c]tions, comprenant celle des routes et des travaux hydrauliques. Le deuxiè[me] enseignera l'architecture civile et les arts du dessin qui se rapportent au[x] constructions en général. Le troisième enseignera la mécanique appliqu[ée]. Ces professeurs seront pris parmi les ingénieurs en chef ou ingénieurs ordinaires qui auront été jugés capables par le conseil de l'école. Ils recevro[nt] le traitement de leur grade et de leur classe. — Art. 69. Il sera pris, sur [le] produit de la taxe d'entretien des routes, une somme annuelle de soixan[te-]douze mille quatre cents francs pour les dépenses de l'école, consist[ant] en traitement des élèves et d'un secrétaire, salaire des garde-salles et [du] portier, prix à distribuer à la fin de l'année, frais de chauffage, lumière, etc., achat de livres d'art, d'instrumens, et confection de modèles, et en inde[m]nités à accorder aux professeurs pour les travaux extraordinaires relatifs [à] l'instruction dont ils pourront être chargés après la cessation des cou[rs], sur la délibération du conseil de l'école, approuvée par le directeur-géné[ral].

Un décret du 20 février 1811 augmente les cadres du Corps impérial [des] Ponts-et-Chaussées de deux inspecteurs divisionnaires, sept ingénieurs [en] chef de première classe, six ingénieurs en chef de seconde classe, [..] ingénieurs ordinaires de première classe, onze ingénieurs ordinaires [de] seconde classe.